Μαθηματική περιοδική έκδοση – Απρίλιος 2014

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η δημιουργία ενός μαθηματικού περιοδικού από μαθητές Γυμνασίου υπό την εποπτεία των καθηγητών τους έχει πολλαπλά οφέλη. Οι μαθητές αξιοποιώντας τη σύγχρονη τεχνολογία ερευνούν, εμβαθύνουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, συνεργάζονται για να φτιάξουν μια δική τους εργασία πάνω στα μαθηματικά. Οι μαθητές γίνονται συντάκτες ενός επιστημονικού περιοδικού, μιας πρωτόγνωρης για αυτούς εμπειρία.

Η ιδέα της έκδοσης του περιοδικού ανήκε στον μαθηματικό του σχολείου, η οποία πλαισιώθηκε από άλλους καθηγητές και ασφαλώς από τους μαθητές του σχολείου. Συμμετείχαν μαθητές από όλες τις τάξεις. Καταβλήθηκε προσπάθεια να αναδειχθεί ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο θεωρία και ασκήσεις, αλλά ότι υπάρχουν μαθηματικά ανέκδοτα, γρίφοι, σταυρόλεξα, διασύνδεση των μαθηματικών με άλλες επιστήμες, αλλά και διασύνδεση των διαφόρων κλάδων των μαθηματικών μεταξύ τους, κ.ά.

Έτσι το περιοδικό απέκτησε διαθεματικό χαρακτήρα και μάλιστα, κάποιες εργασίες είναι γραμμένες στην αγγλική, γαλλική και αρχαία ελληνική γλώσσα.

Κανάλια Μαγνησίας, Απρίλιος 2014 **Η συντακτική ομάδα**

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

1. **Ζιώγας Χρήστος** Καθηγητής Μαθηματικών
2. **Μπούρα Μαρία** Καθηγήτρια Αγγλικής Φιλολογίας
3. **Καλτσούδη Αναστασία** Καθηγήτρια Γαλλικής Φιλολογίας
4. **Μαλιαγκάνη Νικολέτα** Καθηγήτρια Ελληνικής Φιλολογίας
5. **Μακρής Απόστολος** μαθητής Γ’ Γυμνασίου
6. **Πολυχρόνη Καλλιόπη** μαθήτρια Γ’ Γυμνασίου
7. **Μπεφάνη Καλλιόπη** μαθήτρια Γ’ Γυμνασίου
8. **Ευαγγελινού Μαρία** μαθήτρια Γ’ Γυμνασίου
9. **Βοβότης Κωνσταντίνος** μαθητής Β’ Γυμνασίου
10. **Ντόντη Ιωάννα** μαθήτρια Β’ Γυμνασίου
11. **Κοκόλας Δημήτρης** μαθητής Β’ Γυμνασίου
12. **Μωραΐτη Μαρία** μαθήτρια Β’ Γυμνασίου
13. **Σκοπιανού Σταματία** μαθήτρια Α’ Γυμνασίου
14. **Κοκόλα Μαρία** μαθήτρια Α’ Γυμνασίου
15. **Γαϊτανά Βιργινία** μαθήτρια Α’ Γυμνασίου
16. **Παππής Στέφανος** μαθητής Α’ Γυμνασίου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΓΧΑΡΗΤΗΡΙΑ

- Θα ήθελα να εκφράσω τα θερμά μου συγχαρητήρια **στον μαθηματικό** του Σχολείου μας για την αξιέπαινη αυτή προσπάθεια, καθώς και **στους εκπαιδευτικούς και μαθητές** που την πλαισίωσαν και την υλοποίησαν με τόση επιτυχία.

Η Διευθύντρια
Μπούρα Μαρία

- **Η συντακτική επιτροπή συγχαίρει θερμά** τις μαθήτριες Α' Γυμνασίου: **Σκοπιανού Σταματία** και **Κοκόλα Μαρία** για τη διάκρισή τους στους μαθηματικούς διαγωνισμούς **Θαλής** και **Ευκλείδης.**

Ένα μικρό ιστορικό για το σχολείο μας

Στα Κανάλια, αρχικά, δεν υπήρχε γυμνάσιο, ωστόσο με τρομερές δυσκολίες και με την συνδρομή του καθηγητή θεολόγου και φιλόλογου Αθανάσιου Γκαβαρδίνα, καθώς επίσης και ομογενών από την Γερμανία και άλλων συγχωριανών, ιδρύθηκε ιδιωτικό γυμνάσιο το 1962. Στο σχολείο φοιτούσαν μαθητές από Κανάλια, Κερασιά, Γλαφυρές, Κεραμίδι και Βένετο. Αργότερα, οι αδελφοί Τρικιώνη παραχωρούν ένα οικόπεδο και στη συνέχεια ανεγείρεται και λειτουργεί το 1967 το νέο ιδιωτικό γυμνάσιο με πέντε αίθουσες. Το 1975, το γυμνάσιο παραχωρείται στο δημόσιο. Έπειτα από αλλεπάλληλες προσπάθειες, στεγάζεται από το 1985 στο υπάρχον κτήριο του σχολείου.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Για τη ζωή του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού Ευκλείδη είναι γνωστά λίγα πράγματα. Γεννήθηκε περίπου το 325 π.Χ. και πέθανε το 265 π.Χ., ήταν σύγχρονος του Αρχιμήδη και πιθανόν να μαθήτευσε στην Ακαδημία του Πλάτωνα στην Αθήνα. Κατά την κυριαρχία του Πτολεμαίου Α' στην Αλεξάνδρεια ίδρυσε ο Ευκλείδης μία Σχολή. Το κυριότερο σύγγραμμα του Ευκλείδη, υπό τον τίτλο «Στοιχεία» που υποδιαιρείται σε 13 βιβλία, αποτελεί το σπουδαιότερο έργο των αρχαιοελληνικών Μαθηματικών και είναι ακόμα η βάση των σχολικών Μαθηματικών. Σ' αυτό το σύγγραμμά του παρουσιάζει ο Ευκλείδης, με σύντομη και ακριβή μορφή, μία συστηματική, απαγωγική - αξιωματική σύνοψη και προσαρμογή όλων των προευκλείδειων μαθηματικών γνώσεων, τις οποίες συμπλήρωσε με θεωρήματα δικά του και άλλα συγχρόνων του Μαθηματικών.

- ✓ **ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ**

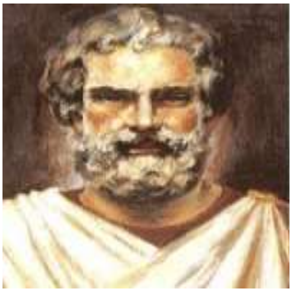
Όταν δοθούν δύο αριθμοί Δ και δ, τότε υπάρχουν δύο άλλοι αριθμοί π και υ, έτσι ώστε να ισχύει $\boxed{\mathbf{\Delta = \delta.\pi + \upsilon}}$ και **υ<δ**. Ο **Δ** λέγεται διαιρετέος, ο **δ** λέγεται διαιρέτης για τον οποίο ισχύει $\delta \neq 0$, ο **π** πηλίκο και ο **υ** υπόλοιπο της διαίρεσης. Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται Ευκλείδεια Διαίρεση.

Παραδείγματα:

1) Αν Δ=13, δ=5 τότε π=2 και υ=3, άρα: 13=5.2+3
2) Αν Δ=22, δ=2 τότε π=11 και υ=0, οπότε 22=2.11 (στην περίπτωση που υ=0, λέμε ότι έχουμε μια **τέλεια διαίρεση**).

3) Η ισότητα 13=2.4+5 **δεν** παριστάνει Ευκλείδεια διαίρεση. Γιατί; (άσκηση για τον αναγνώστη).

ΘΑΛΗΣ



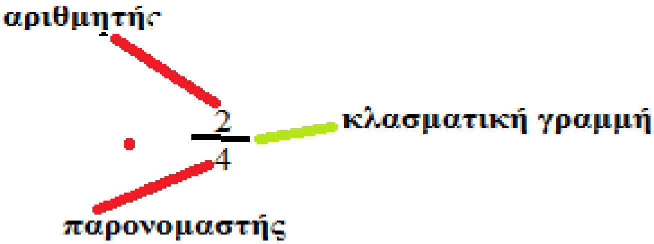
Ο Θαλής ο Μιλήσιος, (περίπου 630 π.Χ. - 543 π.Χ.) ήταν αρχαίος Έλληνας, ο πρώτος των επτά σοφών της αρχαιότητας, μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος, μηχανικός, μετεωρολόγος και προσωκρατικός φιλόσοφος, ιδρυτής της Μιλησιακής σχολής της φυσικής φιλοσοφίας. Ήταν γιος του Εξαμύου και της Κλεοβουλίνης, και δραστηριοποιήθηκε στις αρχές του 6ου αιώνα π.Χ. στη Μίλητο. Ο Θαλής αναφέρεται σε διάφορες πηγές συνήθως ως καινοτόμος και πρωτοπόρος για την εποχή του. Υπάρχει διαφωνία σχετικά με τα γραπτά του έργα. Άλλοι υποστηρίζουν πως δεν άφησε γραπτά ενώ άλλοι του αποδίδουν κάποια έργα, ανάμεσα τους το Περί ηλιοστασίων και Περί ισημερίας. Ο Ηρόδοτος μας πληροφορεί πως ο Θαλής πρόβλεψε την έκλειψη Ηλίου του 585 π.Χ.

Επίσης, αναφορές κάνουν λόγο για επιχειρηματικές δραστηριότητες του Θαλή. Ο Αριστοτέλης στα Πολιτικά δίνει μία διαφορετική ερμηνεία για τις οικονομικές δραστηριότητες που ανέπτυξε. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη οι συμπολίτες του Θαλή αμφισβητούσαν την χρησιμότητα της φιλοσοφίας, αφού αυτή δεν σε βοηθάει να πλουτίσεις. Τότε ο Θαλής έχοντας προβλέψει από τις κινήσεις των άστρων ότι αναμένεται χρονιά πολύ καλής σοδειάς νοίκιασε όλα τα ελαιοτριβεία της Μιλήτου. Την επόμενη χρονιά που η κίνηση υπήρξε αυξημένη έγινε πλούσιος και έτσι απέδειξε στους συμπολίτες του, πως με τη σοφία μπορεί κανείς να πλουτίσει, όμως δεν είναι αυτός ο σκοπός της.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Η λέξη "**κλάσμα**" προέρχεται από την αρχαία ελληνική λέξη "κλάω" ή "κλω" που σημαίνει κόβω, τεμαχίζω κάτι. Το κλάσμα δηλώνει ότι έχουμε ένα κομμάτι, δηλαδή ένα μέρος κάποιου πράγματος. Στα μαθηματικά θεωρούμε ότι αυτό που μοιράζεται, μπορεί να χωριστεί σε ίσα μέρη. Ένα κλάσμα εκφράζει σε πόσα ισοδύναμα μέρη έχουμε μοιράσει κάτι και πόσα από αυτά έχουμε πάρει, ή σε πόσες ισοδύναμες ομάδες έχουμε μοιράσει ένα πλήθος όμοιων πραγμάτων και πόσες από αυτές έχουμε πάρει.

Ένας κλασματικός αριθμός αποτελείται από τα εξής μέρη:



Κάθε κλάσμα αποτελεί μια μορφή διαίρεσης: δηλαδή ο αριθμητής έχει τον ρόλο του διαιρετέου και ο παρανομαστής έχει τον ρόλο του διαιρέτη.

Κάθε μέρος του κλάσματος εκφράζει:

- ***Παρανομαστής***: σε πόσα ισοδύναμα μέρη έχουμε μοιράσει κάτι ή σε πόσες ισοδύναμες ομάδες έχουμε μοιράσει ένα πλήθος όμοιων πραγμάτων.
- ***Αριθμητής***: πόσα από τα ισοδύναμα μέρη που είχαμε μοιράσει κάτι έχουμε πάρει ή πόσες από τις ισοδύναμες ομάδες που είχαμε μοιράσει ένα πλήθος όμοιων πραγμάτων έχουμε πάρει.

- ***Κλασματική γραμμή***: είναι η γραμμή που χωρίζει τον παρανομαστή (τα ισοδύναμα μέρη που έχουμε μοιράσει) από τον αριθμητή (τα ισοδύναμα μέρη που έχουμε πάρει).

Είδη κλασμάτων:

- Το κλάσμα να είναι μικρότερο από μια ακέραια μονάδα. Στην περίπτωση αυτή ο αριθμητής είναι πάντα μικρότερος από τον παρανομαστή.
- Το κλάσμα να είναι ίσο με μια ακέραια μονάδα. Στην περίπτωση αυτή ο αριθμητής είναι πάντα ίδιος με τον παρανομαστή.
- Το κλάσμα να είναι μεγαλύτερο από μια ακέραια μονάδα. Στην περίπτωση αυτή ο αριθμητής είναι πάντα μεγαλύτερος από τον παρανομαστή.

Σύγκριση κλασμάτων:

- ✓ Αν τα κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή, τότε μικρότερο κλάσμα είναι αυτό που έχει μεγαλύτερο παρανομαστή.
- ✓ Αν τα κλάσματα έχουν τον ίδιο παρανομαστή, τότε μικρότερο κλάσμα είναι αυτό που έχει μικρότερο αριθμητή.
- ✓ Αν τα κλάσματα δεν έχουν ούτε τον ίδιο αριθμητή, ούτε τον ίδιο παρανομαστή, τότε δεν μπορούμε να τα συγκρίνουμε κατευθείαν.

Ισοδύναμα κλάσματα:

Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος του όλου, δηλαδή όταν και τα δύο κλάσματα περιγράφουν την ίδια ποσότητα.

Ανάγωγο κλάσμα:

Ανάγωγο ονομάζουμε το κλάσμα που δεν μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο, δηλαδή δεν υπάρχει κάποιος αριθμός που να διαιρεί ταυτόχρονα τον αριθμητή και τον παρανομαστή του κλάσματος.

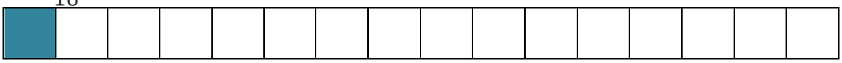
Λυμένες ασκήσεις:

1. Γράψτε με τη μορφή κλάσματος τους παρακάτω αριθμούς: 5 0,1 1 0,7 1,5

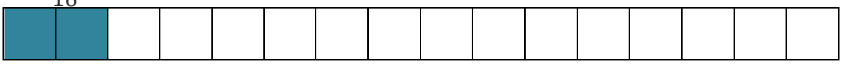
- $5 = \frac{5}{1}$
- $0,1 = \frac{1}{10}$
- $1 = \frac{1}{1}$
- $0,7 = \frac{7}{10}$
- $1,5 = \frac{15}{10}$

2. Στις παρακάτω ράβδους να χρωματίσετε το μέρος τους που περιγράφεται από το αντίστοιχο κλάσμα.

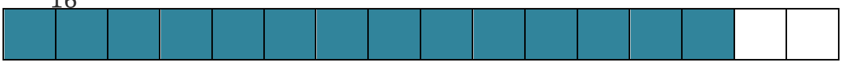
α) $\frac{1}{16}$



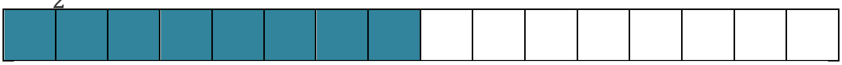
β) $\frac{2}{16}$



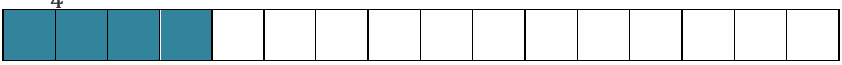
γ) $\frac{14}{16}$



δ) $\frac{1}{2}$



ε) $\frac{1}{4}$



ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

Οι πράξεις των μαθηματικών στα πλαίσια της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι τέσσερις: η πρόσθεση με σύμβολο πράξης ανάμεσα σε δύο αριθμούς το (+), η αφαίρεση(-), ο πολλαπλασιασμός (.) και η διαίρεση (/) ή (:). Βέβαια δεν είναι οι μόνες πράξεις αυτές, υπάρχουν και πολλές άλλες.

Όση προσπάθεια έγινε για να μάθουμε τους κανόνες που διέπουν για να εκτελεστεί η κάθε πράξη, τόση προσπάθεια πρέπει να γίνει για να μάθουμε και τους κανόνες που ισχύουν για το ποιες πράξεις εκτελούνται σε προτεραιότητα σε σχέση με τις υπόλοιπες.

Μην τηρώντας λοιπόν, την προτεραιότητα των πράξεων στα μαθηματικά, θα οδηγηθείτε σε λάθος αποτέλεσμα. Για να δούμε όμως με ποια σειρά εκτελούμε τις πράξεις;

1. Οι πράξεις στις παρενθέσεις
2. Οι δυνάμεις
3. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις (με την σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά)
4. Προσθέσεις και αφαιρέσεις (με την σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά)

Να τονίσουμε ότι και τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις τις κάνουμε πάλι με την παραπάνω σειρά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. (10+5):3-(21-5):4 =

15:3-16:4 = 5-4 =1

Β. **10^3-(2.150+600:3):2**= 10^3-(300+200):2 = 10^3-500:2 = 1000-500:2 = 1000-250 =750

Γ. **(4^2-3^2):7+2^2.4+$(2.3)^2$:9** = (16-9):7+2^2.4+6^2:9 = 7:7+2^2.4+6^2:9 = 7:7+4.4+36:9 = 1+16+4 = 17+4 = 21

Δ. **6^2+2^2-5-(3^2-2^3)+2.(6+2-2.3)** = 6^2+2^2-5.(9-8)+2.(6+2-6) = 6^2+2^2-5.1+2.(8-6) = 6^2+2^2-5.1+2.2 = 36+4-5+4 = 40-5+4 = 35+4 = 39.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΟΥΣΙΚΗ

Τα μαθηματικά και η μουσική είναι δυο επιστήμες που έχουν πολύ μεγάλη σχέση μεταξύ τους. Από την αρχαιότητα ακόμη οι δύο τέχνες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και η αλληλεπίδραση αυτή φτάνει ως τις μέρες μας...

Η ιδέα της σύνδεσης των μαθηματικών και της μουσικής γεννήθηκε πριν από 26 ολόκληρους αιώνες, στην αρχαία Ελλάδα από τον Πυθαγόρα, μαθηματικό και ιδρυτή της πυθαγόρειας σχολής. Ο φιλόσοφος γνώριζε πολύ καλά τη σχέση της μουσικής με τους αριθμούς.

Οι ειδικοί ερευνητές θεωρούν ότι το πιθανότερο είναι πως ο ίδιος και οι μαθητές του εντρύφησαν στη σχέση της μουσικής και των αριθμών μελετώντας το αρχαίο όργανο μονόχορδο. Όπως φαίνεται από το όνομά του, το μονόχορδο ήταν ένα όργανο με μία χορδή και ένα κινητό καβαλάρη το οποίο διαιρούσε τη χορδή επιτρέποντας μόνο ένα τμήμα της να ταλαντώνεται και από αρκετούς μελετητές τοποθετείται στην οικογένεια του λαούτου δηλαδή με βραχίονα - χέρι. Το μονόχορδο χρησιμοποιήθηκε για τον καθορισμό των μαθηματικών σχέσεων των μουσικών ήχων. Ονομάζονταν και

"Πυθαγόρειος κανών" γιατί απέδιδαν την εφεύρεσή του στον Πυθαγόρα. Πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί εργάσθηκαν για τον υπολογισμό των μουσικών διαστημάτων πάνω στον κανόνα, όπως ο Αρχύτας (εργάσθηκε στις αναλογίες των διαστημάτων του τετραχόρδου στα τρία γένη, διατονικό, χρωματικό και εναρμόνιο και ανακάλυψε το λόγο της μεγάλης τρίτης στο εναρμόνιο γένος), ο Ερατοσθένης ο Δίδυμος (σ΄ αυτόν αποδίδεται ο καθορισμός του "κόμματος του Διδύμου" που είναι η διαφορά μεταξύ του μείζονος τόνου (9/8) και του ελάσσονος (10/9) δηλαδή 81/80).

Τετραγωνική ρίζα & Πυθαγόρειο θεώρημα

- **Τετραγωνική ρίζα** ενός αριθμού α ≥ 0 είναι ο αριθμός β≥ 0 που αν υψωθεί στο τετράγωνο (δηλαδή αν πολλαπλασιαστεί με τον ίδιο του τον εαυτό) μας δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα γράφετε $\sqrt{\alpha}$. Είναι β=$\sqrt{\alpha}$ γιατί $β^2$ = α.

Παράδειγμα:

Είναι: $\sqrt{81}$ = 9 γιατί 9^2 = 81

$\sqrt{1}$ = 1 γιατί 1^2 = 1

Άσκηση

Αριθμός	16	$\frac{1}{16}$	-16	16^{-2}	16^2
Τετραγωνική ρίζα του αριθμού					

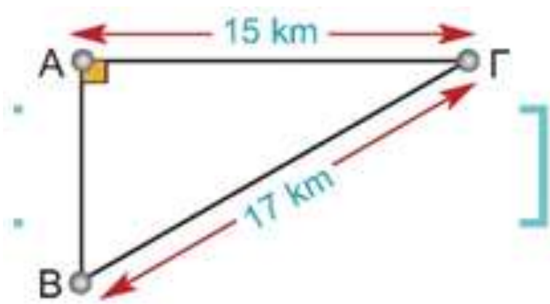
Σύνδεση Άλγεβρας – Γεωμετρίας

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα βασικό συνδετικό κρίκο της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα. Η σύνδεση της Άλγεβρας με την Γεωμετρία είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική καθώς μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε την εποπτεία της Γεωμετρίας σε αλγεβρικά προβλήματα και την ευχέρεια των πράξεων της Άλγεβρας σε γεωμετρικά προβλήματα. Επίσης, το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί ένα από τα θεμέλια της Τριγωνομετρίας.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα διατυπώνεται, ως εξής: **"το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών".**

Ασκήσεις

1. Πόσο απέχει η πόλη Α από την πόλη Β;



Λύση:

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ ή $AB^2 + 15^2 = 17^2$ ή

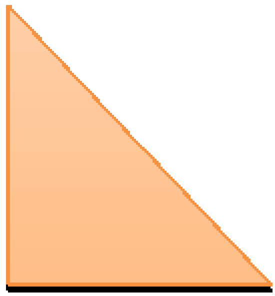
$AB^2 + 225 = 289$ ή $AB^2 = 289 - 225$ ή

$AB^2 = 64$ οπότε $AB = \sqrt{64}$ ή $AB = 8$

Επομένως, η πόλη Α απέχει 8 km από την πόλη Β.

2. Για το παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο δίνονται: ΑΒ=9 cm και ΑΓ=12 cm. Να βρείτε την πλευρά ΒΓ.

Γ



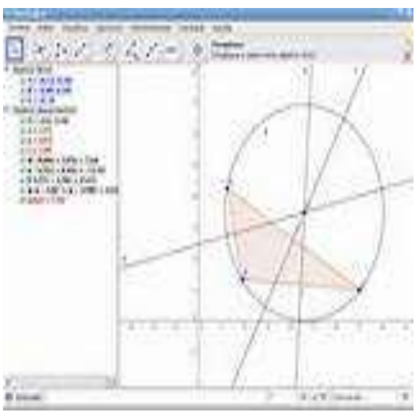
Α Β

Λύση:

$ΒΓ^2=ΑΓ^2+ΑΒ^2$ ή $ΒΓ^2=12^2+9^2$ ή $ΒΓ^2=144+81$ ή $ΒΓ^2=225$ ή $ΒΓ=\sqrt{225}$ ή ΒΓ=15 cm.

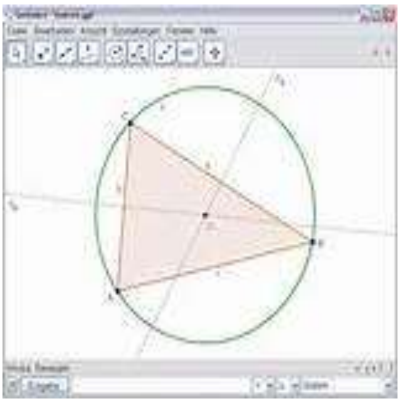
GeoGebra

Software Dinámico de Matemáticas



Το GeoGebra (σύνθεση των λέξεων geometry και algebra) είναι μια μαθηματική εφαρμογή για εκείνους που μελετούν ή εργάζονται με αριθμητική, γεωμετρία, άλγεβρα και υπολογισμούς. Δημιουργός του ειναι ο Μάρκους Χόενβαρτερ όπου ξεκίνησε το πρότζεκτ το 2001 στο Πανεπιστήμιο του Σάλτσμπουργκ, συνεχίζοντας στο Πανεπιστήμιο Φλόριντα Ατλάντικ και τέλος στο Πανεπιστήμιο της Λιντς (Αυστρία) με τη βοήθεια προγραμματιστών και μεταφραστών από όλο τον κόσμο.

Είναι μια μάλλον πολύπλοκη εφαρμογή που είναι στοχευμένη αποκλειστικά σε εκείνους που είναι άνετοι με πολύπλοκα μαθηματικά, αλλά το πλεονέκτημα που προσφέρει το GeoGebra σε σχέση με παρόμοιες εφαρμογές είναι ότι παρέχει πολλαπλές αναπαραστάσεις των αντικειμένων που είναι ενωμένες δυναμικά. Η ιδέα πίσω από το GeoGebra είναι να συνδεθούν γεωμετρικές, αλγεβρικές και αριθμητικές αναπαραστάσεις με ένα διαδραστικό τρόπο. Αυτό μπορεί να γίνει με σημεία, διανύσματα, γραμμές, κωνικές τομές. Το GeoGebra σας επιτρέπει να εισάγετε κατευθείαν και να χειριστείτε εξισώσεις και συντεταγμένες και σας επιτρέπει να σχεδιάσετε συναρτήσεις, να εργαστείτε με ρυθμιστές για να διερευνήσετε παραμέτρους, να βρείτε συμβολικά παράγωγα, και να χρησιμοποιήσετε ισχυρές εντολές.



Τα περισσότερα τμήματά του αποτελούν ελεύθερο λογισμικό. Τα τελευταία χρόνια στην Ελλάδα χρησιμοποιείται εν μέρει για την διδασκαλία των μαθηματικών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η εμπειρία μου με το GeoGebra στο σχολείο μου έδωσε την δυνατότητα να συμπεράνω ότι είναι ένα πρόγραμμα ευέλικτο και μέσα από τον πειραματισμό κατάλαβα καλύτερα τις έννοιες των μαθηματικών. Επίσης, είχα την ευχέρεια να γίνω, έστω και για λίγο, ένας μικρός μαθηματικός ανακαλύπτοντας κάποιες μαθηματικές έννοιες. Παρόμοια μαθηματικά λογισμικά σαν το GeoGebra είναι το **Sketchpad**, το **Cabri** κ.ά.

Σημείωση: Ένα μέρος του υλικού της παραπάνω εργασίας προήλθε από έγκυρες ιστοσελίδες του διαδικτύου. Οι εικόνες είναι από το περιβάλλον εργασίας του GeoGebra.

Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

- **Διαβάζουμε** καλά το πρόβλημα και **διακρίνουμε** τα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα**.
- **Χρησιμοποιούμε** ένα γράμμα **(συνήθως x)** για εκφράσουμε τον **άγνωστο** αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε. Όπου χρειάζεται παίρνουμε περιορισμό για το x.
- Εκφράζουμε **όλα τα άλλα μεγέθη** του προβλήματος **με τη βοήθεια του x και των πράξεων.**
- **Γράφουμε την εξίσωση** του προβλήματος **χρησιμοποιώντας τα δεδομένα** της εκφώνησης.
- **Λύνουμε** την εξίσωση.
- **Ελέγχουμε** αν αυτό που βρήκαμε συμπίπτει με τα δεδομένα του προβλήματος.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε ένα αριθμό που το τριπλάσιό του, αν το αυξήσουμε κατά 6, δίνει τον αριθμό ελαττωμένο κατά 3.

Λύση:

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Τότε θα γινόταν η εξίσωση:

$3x + 6 = x - 3$

$3x - x = -3 - 6$

$2x = -9$

$x = - 9/2$

2. Να βρείτε ένα αριθμό του οποίου το διπλάσιό του, αν το αυξήσουμε κατά 3, ισούται με το τριπλάσιό του ελαττωμένο κατά 2.

Λύση:

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός . Τότε θα γινόταν η εξίσωση:

$2x + 3 = 3x - 2.$

$2x - 3x = -2 - 3.$

$-1x = -5$

$x = -5/-1$

$x = 5$

3. Να βρείτε τον αριθμό που όταν τον προσθέσουμε στους αριθμητές των κλασμάτων 3/2 και 7/3 γίνονται ίσα.

Λύση:

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός.
Τότε τα κλάσματα θα γίνουν $(3 + x) / 2$ και $(7 + x) / 3$. Επειδή τα κλάσματα γίνονται ίσα έχουμε την εξίσωση: $(3 + x) / 2 = (7 + x)/ 3$

Λύνουμε την εξίσωση:

$(3 + x) / 2 =(7 + x) / 3$ ή $3(3 + x) = 2(7 + x)$ ή $9 + 3x = 14 + 2x$ ή $3x – 2x = 14 – 9$ ή $x = 5$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι το 5€.

4. Μια αίθουσα έχει 46 θρανία και καρέκλες. Αν κάθε θρανίο κοστίζει 15 € , κάθε καρέκλα κοστίζει 10 € και όλα μαζί θρανία και καρέκλες 535 € , να βρείτε πόσα είναι τα θρανία και πόσες οι καρέκλες.

Λύση:

Αν x το πλήθος των θρανίων (όπου x φυσικός αριθμός) , τότε το πλήθος των καρεκλών είναι 46 – x.
Έτσι το κόστος των θρανίων είναι 15x και το κόστος των καρεκλών είναι 10(46 – x) €.
Επειδή το συνολικό κόστος είναι 535 € έχουμε την εξίσωση:

$$15x + 10(46 - x) = 535$$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$15x + 10(46 - x) = 535$

$15x + 460 - 10x = 535$

$15x - 10x = 535 - 460$

$5x = 75$

$x = 75/5$

$x = 15$

Άρα τα θρανία είναι 15 και οι καρέκλες 46 – 15 = 31

5. Ο Κωνσταντίνος και ο Θανάσης θα μοιραστούν 165 € . Ο Κωνσταντίνος θα πάρει τα διπλάσια χρήματα από τον Θανάση. Πόσα χρήματα θα πάρει ο καθένας;

Λύση:

Αν ο Θανάσης έχει x € (όπου x θετικός πραγματικός αριθμός)

τότε θα γινόταν η εξίσωση:

$x + 2x = 165$

$3x = 165$

$x = 165/3$

$x = 55$

Άρα ο Θανάσης θα πάρει 55 € και ο Κωνσταντίνος: 55 . 2 = 110 €.

6. Μια βρύση μπορεί να αδειάσει μια δεξαμενή σε 8 ώρες ενώ μια άλλη να γεμίσει την ίδια σε 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή αν είναι άδεια και ανοίξουμε συγχρόνως τις δύο βρύσες ;

Λύση:

Έστω ότι η δεξαμενή γεμίζει σε x ώρες (όπου x θετικός πραγματικός αριθμός).

Αφού η μια βρύση αδειάζει την δεξαμενή σε 8 ώρες, σε μια ώρα θα αδειάσει το 1/8 και σε x ώρες τα x/8 της δεξαμενής.

Ομοίως η άλλη βρύση σε μια ώρα θα γεμίσει 1/6 και σε x ώρες τα x/6 της δεξαμενής.

Αφού η μια βρύση γεμίζει και η άλλη αδειάζει έχουμε την εξίσωση:

$(x / 6) – (x/8) = 1$ ή $24.(x/6) – 24.(x/8) = 24.1$ ή $4x – 3x = 24$ ή $x = 24$.

Άρα η δεξαμενή θα γεμίζει σε 24 ώρες.

7. Ένας πατέρας άφησε τα 3 / 5 της περιουσίας του στην κόρη του και τα υπόλοιπα στον γιο του. Αν η περιουσία του ήταν 450.000 € , πόσα χρήματα πήρε η κόρη του και πόσα ο γιος του;

α) Λύση με εξίσωση:

Έστω x τα χρήματα του γιου του από την περιουσία (όπου x θετικός πραγματικός αριθμός). Τότε έχουμε την εξίσωση:

(3/5).450000 + x = 450000

270000 + x =450000

x = 470000 – 270000

x = 180000 €

Η κόρη πήρε: (3/5).450000 = 270000 €.

β) Λύση με αναγωγή στην μονάδα:

- Τα 5/ 5 της περιουσίας είναι 450000 €
- Τα 1/ 5 της περιουσίας είναι 450000 : 5 = 90000 €
- Τα 3/ 5 της περιουσίας είναι 90000 . 3 = 270000€

450000 – 270000 = 180000 €.

γ) Λύση με πρακτική αριθμητική:

(3/5). 450000 = 270000

450000 – 270000 = 180000 €

Άρα η κόρη θα πάρει 270000 € και ο γιος 180000 €.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΓΡΙΦΟΙ

1. Ο καπετάν Γιάννης αισθάνεται το τέλος του. Έχει 3 γιους στους οποίους θέλει και να μοιράσει όπως αυτός πιστεύει δίκαια, την περιουσία του. Η περιουσία του είναι μόνο 19 πρόβατα. Ούτε 18 ούτε 20.
Στον πρώτο του γιο, ως πρωτότοκο θέλει να αφήσει το 1/2 των προβάτων. Στον δεύτερο το 1/4 των προβάτων και στον τρίτο και τελευταίο το 1/5.
Βέβαια, σε καμία περίπτωση, δεν θέλει οι γιοι του να χωρίσουν τα πρόβατα σε κομμάτια, σκοτώνοντάς τα. Βλέπεις, αγαπάει τα πρόβατα σαν παιδιά του. Τι πρέπει ο πατέρας να κάνει;

2. Ένας επιχειρηματίας σκέφτηκε το παρακάτω συνταξιοδοτικό πρόγραμμα για τους υπαλλήλους του: τους είπε πως θα τους δώσει σύνταξη αμέσως μόλις ο καθένας τους εργασθεί για 8 καθαρές ώρες, στο ταμείο της εταιρίας. Η μόνη προϋπόθεση που έθεσε ήταν ότι κανένας τους δεν επιτρέπεται να εργασθεί κάθε μέρα, περισσότερο από το μισό του χρόνου που του απομένει για να συμπληρώσει τις 8 αυτές ώρες. Την πρώτη μέρα δηλαδή ένας υπάλληλος μπορεί να εργασθεί στο ταμείο μέχρι 4 ώρες, τη δεύτερη μέχρι 2, κ.ο.κ. Σε πόσες ημέρες αυτός ο υπάλληλος θα μπορέσει να βγει στη σύνταξη;

3. |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Στις 10 θέσεις του παραπάνω σχήματος γράψτε έναν δεκαψήφιο αριθμό, ώστε το ψηφίο στην πρώτη θέση να δείχνει τον συνολικό αριθμό των μηδενικών του αριθμού, το ψηφίο στη θέση με την ένδειξη 1 να δείχνει τον συνολικό αριθμό των 1 και ούτω καθεξής, μέχρι την τελευταία θέση, το ψηφίο της οποίας πρέπει να δείχνει τον συνολικό αριθμό των 9 στον αριθμό. Η απάντηση είναι μοναδική.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. Ο πατέρας αγοράζει ακόμα ένα πρόβατο, οπότε τα πρόβατα γίνονται 20. Ο πρώτος γιος παίρνει το 1/2, δηλαδή 10 πρόβατα. Ο δεύτερος γιος παίρνει το 1/4, δηλαδή 5 πρόβατα. Ο τρίτος γιος παίρνει το 1/5, δηλαδή 4 πρόβατα. Μένει ακόμα ένα πρόβατο στο μαντρί, το οποίο ο γέρος ξαναπουλάει.

2. Δεν θα βγει στη σύνταξη ποτέ! Ο υπολειπόμενος χρόνος διαιρείται συνεχώς στα δύο αλλά δεν μηδενίζει.

3. Ο αριθμός είναι 6210001000.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΝΕΚΔΟΤΑ

1. Γιατί τα μαθηματικά είναι λυπημένα; Γιατί έχουν πολλά προβλήματα!
2. Γιατί οι Άραβες είναι πιο έξυπνοι στα μαθηματικά; Γιατί κατάφεραν να τετραγωνίσουν το Πεντάγωνο!
3. Είναι ένας μαθηματικός, φυσικός και ένας φιλόλογος σε ένα δωμάτιο όπου δεν έχει ούτε πόρτες ούτε παράθυρα και γενικότερα κανένα τρόπο για να βγουν. Ποιος θα καταφέρει να βγει; Λύση: Ο μαθηματικός! Πώς; --> " Έστω / θέτω πόρτα!" και βγαίνει.
4. Ερώτηση: Πόσοι Μαθηματικοί χρειάζονται για να αλλάξουν μια λάμπα; Απάντηση: Κανείς. Αφήνεται στον αναγνώστη σαν άσκηση.
5. Πώς ξεριζώνει ένας μαθηματικός ένα δέντρο; Υψώνει στο τετράγωνο για να φύγει η ρίζα.
6. Δύο φίλοι κάνουν ένα ταξίδι με αερόστατο. Κάποια στιγμή αρχίζει να βρέχει. Σε πολύ λίγο η βροχή γίνεται καταιγίδα και το αερόστατο κομμάτια. Πυξίδες και χάρτες χάνονται. Οι δύο φίλοι κρατιούνται από κάτι σκοινιά και καταφέρνουν να προσγειωθούν σώοι και

αβλαβείς σε ένα λιβάδι. Η καταιγίδα έχει πια σταματήσει και περίπου στο κέντρο του λιβαδιού μπορούν να διακρίνουν έναν άντρα να διαβάζει. Πάνε λοιπόν προς το μέρος του και τον ρωτάνε: - "Συγνώμη, μήπως ξέρετε που βρισκόμαστε;" Ο άντρας κοιτάει για λίγο γύρω του, σκέφτεται και λέει: - "Βρίσκεστε στη μέση ενός λιβαδιού." Οι φίλοι τον ευχαριστούν και φεύγουν. Όταν απομακρύνονται κάπως, λέει ο ένας στον άλλο: - "Αυτός ήταν μαθηματικός!" - "Από πού το κατάλαβες;" ρωτάει ο άλλος. - "Πρώτον σκέφτηκε πριν απαντήσει και δεύτερον έδωσε μια σωστή απάντηση με ακρίβεια που όμως δε μας χρησιμεύει σε τίποτα!"

Πυθαγόρειο Θεώρημα

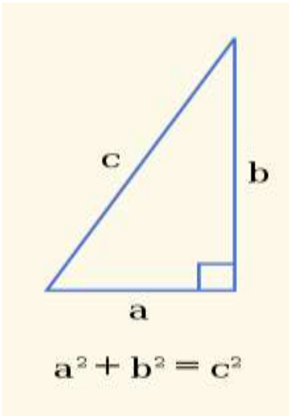
«**Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις**».

Γνωμικά Πυθαγόρα

1. Μη εν πολλοίς ολίγα λέγε, αλλ’ εν ολίγοις πολλά.
2. Ελεύθερον αδύνατον είναι τον πάθεσι δουλεύοντα και υπό παθών κρατούμενον.
   Μετάφραση: είναι αδύνατο να θεωρείται ελεύθερος αυτός που είναι δούλος στα πάθη του και κυριαρχείται από αυτά.
3. Ου πάντα τοις πάσι ρητά.
   Μετάφραση: δεν μπορούν να ειπωθούν όλα σε όλους
4. Αρχή πολιτείας απάσης νέων τροφά.
   Μετάφραση: θεμέλιο κάθε πολιτείας είναι η ανατροφή των νέων.

5. Πάντα κατ' αριθμόν γίγνονται.
   Μετάφραση: τα πάντα γίνονται σύμφωνα με αριθμούς.
6. Χρη σιγάν ή κρείσσονα σιγής λέγειν.
   Μετάφραση: πρέπει να σωπαίνεις ή να λες κάτι καλύτερο από τη σιωπή.

Le Théorème de Pythagore*



« Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des deux autres côtés est égale au carré de l' hypoténuse ».

Pythagore : Mathématicien et philosophe présocratique grec, de Samos, né aux environs de 580 av. J.-C., qui a éprouvé le théorème, donné par les dieux, selon une tradition.

Dès ses premières années l' enfant fait preuve d' une intelligence et d' une sagesse exceptionnelles. Sa réputation s' étend peu à peu aux pays voisins jusqu' à atteindre le célèbre Thalès de Milet. A l' âge de 18 ans décide de quitter son pays, parce que le tyran Polycrate arrive au pouvoir et pressent qu' un tel gouvernement constituerait un obstacle pour sa formation. Il fait une série de voyages, pour plus de vingt ans en étudiant la philosophie et les mathématiques. Âgé de plus de cinquante ans il revient à Samos où il décide de commencer à enseigner, sans grand succès. Vers 535 av. J.-C. il quitte Samos, définitivement, et il va en Italie, à Crotone où il continue ses recherches personnelles jusqu' à sa mort.

Pythagorean Theorem

«**In a right angled triangle: the square of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the other two sides**».

Pythagoras (580-490BC): A great mathematician and philosopher in ancient times. He was probably born in Samos somewhere between 580 to 570 BC. He was given this name in honor of Pythia, who had given an oracle saying he would be the most beautiful in soul and body and would become very useful to the world. When he grew, he travelled to Lesvos, Miletos, Egypt and to other countries where he made observations, collected useful information and finally founded his own school in South Italy where he taught.

His mystical religious-political ideas, followed by his students, caused the burning of his school. He invented the "multiplication table" and either he or someone of his students invented the "Pythagoras's Theorem". He also taught that the centre of the universe is a fire by which was created the whole world and around it orbit the sun, earth, moon and other stars. He also believed in reincarnation. He thought that human soul after death, if perfect, united to God, but if sinned goes to the plants or animals as punishment so as to be purified.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗ ΖΩΗ ΜΑΣ. ΓΙΑΤΙ;

"**Ο άνθρωπος είναι ένα κλάσμα που αριθμητή έχει την πραγματική του αξία και παρονομαστή την ιδέα που έχει για τον εαυτό του**. Ο αριθμητής παραμένει ο ίδιος (δηλαδή η πραγματική αξία του ανθρώπου). Γι' αυτό όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής (η ιδέα που έχει για τον εαυτό του) τόσο μικρότερο είναι το κλάσμα (δηλαδή ο άνθρωπος)".

Λέων Τολστόι

❖ ΓΙΑΤΙ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΦΟΒΟΥΝΤΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μάθημα-φόβητρο για όλες τις γενιές, τα μαθηματικά εξακολουθούν να χωρίζουν τους μαθητές σε μυημένους και αμύητους. Γιατί οι μαθητές φοβούνται τα μαθηματικά; Η μαθηματικοφοβία είναι το άγχος, ο φόβος, η ανασφάλεια που αισθάνονται οι μαθητές για το μάθημα των μαθηματικών και βέβαια δεν πρόκειται για μια παθολογική κατάσταση. Προξενείται από τις αρνητικές εμπειρίες των μαθητών στο μάθημα των μαθηματικών και επηρεάζει άμεσα τη μαθηματική τους επίδοση, μειώνοντάς τη στο ελάχιστο. Οφείλεται κατά κύριο λόγο στους εκπαιδευτικούς, στον τρόπο που διδάσκεται το μάθημα, στα «άχαρα» βιβλία των μαθηματικών αλλά και στο οικογενειακό περιβάλλον.

Οι μαθηματικοί πιστεύουν ότι το πρόβλημα προέρχεται κυρίως από τον τρόπο που διδάσκονται τα μαθηματικά, καθώς και από τη μαθηματική γλώσσα, την ιδιαίτερη φύση του μαθήματος των μαθηματικών με την αλυσιδωτή σειρά των εννοιών, την κακή διδασκαλία των μαθηματικών ακόμη και με τη διαδικασία αξιολόγησης των παιδιών, την ασκησιομανία και την βαθμοθηρία, οι οποίες λειτουργούν αρνητικά.

- **ΤΕΛΙΚΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΑ ΣΤΗΝ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ ΜΑΣ ΖΩΗ;**

Το να φθάνουμε σε υψηλό επίπεδο στα μαθηματικά, άραγε σε τι χρησιμεύει αν όχι στη κερδοσκοπία της παραπαιδείας; Δουλεύει το μυαλό; Πολύς κόσμος έχει πετύχει στη ζωή του και έχει κερδίσει τον σεβασμό, χωρίς να ξέρει τίποτε περί εξισώσεων.
Σαφώς ο πολλαπλασιασμός ή η διαίρεση ή η απλή μέθοδος των τριών είναι πράγματα που χρησιμεύουν στη καθημερινή μας ζωή και όχι μόνο. Είναι καταφανές ότι τα μαθηματικά είναι απαραίτητα στην παραγωγή και στην τεχνολογία, αλλά χρησιμεύουν σε κάτι στην πραγματική ζωή; Παραδείγματος χάρη, πού έχουν βοηθήσει οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες έξω από τα μαθηματικά και τη φυσική; Οι χώροι Hilbert της Ανάλυσης; Το θεώρημα Lagrange της Άλγεβρας; Μήπως τελικά τα μαθηματικά είναι περισσότερο μια άσκηση του μυαλού και ίσως βοηθούν στην οργάνωσή του και όχι κάτι περισσότερο; Μήπως είναι κάτι αντίστοιχο με το σκάκι (που πιθανότατα δε βοηθάει σε κάτι);

Όμως μπορείτε να φανταστείτε τον κόσμο μας χωρίς τη δυνατότητα να μετράμε:

το βάρος μας, το ύψος μας, τα χρήματα που πληρώνουμε ή μας πληρώνουν, τα λίτρα πετρελαίου που καταναλώνουμε, τον μισθό που παίρνουμε, το δάνειο που πληρώνουμε, το Φ.Π.Α που αποδίδει ο επιχειρηματίας, το ρεύμα που ξοδεύουμε, τα τέρματα που πέτυχε η αγαπημένη μας ποδοσφαιρική ομάδα στον χθεσινό αγώνα, τις νίκες που απολείπονται για να πάρει το πρωτάθλημα, τους βαθμούς που πρέπει να γράψουμε για να μπούμε στο πανεπιστήμιο, τις βάσεις εισαγωγής μας, τους ψήφους που χρειάζεται ο τάδε υποψήφιος στις εκλογές για να εκλεγεί δήμαρχος ή βουλευτής, τα ποσοστά κάθε κόμματος, τον αριθμό βουλευτών που εκλέγει στο κοινοβούλιο, το μέγεθος ενός ανέμου ή ενός σεισμού, τη θερμοκρασία του σώματος μας για να δούμε αν έχουμε πυρετό και……… και……… και …………

Φανταστείτε έναν κόσμο χωρίς υπολογισμούς, πράξεις, αναλύσεις, σχέδια, λογική συγκρότηση!

- **ΚΑΙ ΤΩΡΑ ΕΝΑ ΠΕΙΡΑΜΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΑΠΙΣΤΟΥΣ ΘΩΜΑΔΕΣ :**

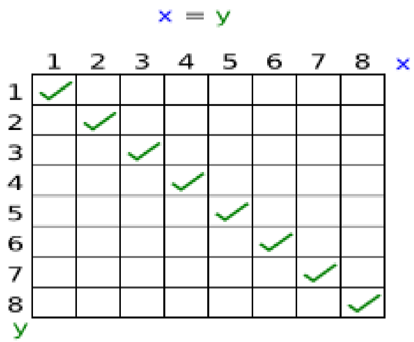
  Σχεδιάστε ένα πίνακα και σημειώνετε καθημερινά τις φορές που χρειάστηκε να μετρήσετε κάτι ή να υπολογίσετε κάτι κατά τη διάρκεια μιας ημέρας. Τα ml γάλατος που πίνετε, τα ρέστα που σας δίνει ο μπακάλης, κ.α. Πόσο συχνά άραγε χρειάζεστε τους αριθμούς, τις πράξεις, τα μαθηματικά;

Υπάρχουν πολλές απόψεις τελικά για το αν τα μαθηματικά είναι ή όχι χρήσιμα στη ζωή μας και ο καθένας μπορεί να έχει τις δικές του απόψεις για το θέμα αυτό. Έτσι συμπεραίνουμε ότι μάλλον πάντα θα υπάρχει το ερώτημα αν τα μαθηματικά είναι χρήσιμα στη ζωή μας…

ΙΣΟΤΗΤΑ – ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ – ΕΞΙΣΩΣΗ

- **Ισότητα** ονομάζεται ένα οποιοδήποτε ζεύγος <u>μαθηματικών παραστάσεων</u> που συνδέονται με τον τελεστή =, δηλαδή αν Α είναι η μία παράσταση και Β η άλλη τότε η έκφραση Α=Β είναι μια ισότητα. Το νόημα της ισότητας είναι ότι αν υπολογιστεί η τιμή της μιας παράστασης και η τιμή της άλλης, τότε οι δύο τιμές είναι ίδιες.

παράδειγμα



Υπάρχουν δύο είδη ισότητας:

- Η *ταυτότητα* που δηλώνει ότι η ισότητα ισχύει υπό οποιεσδήποτε συνθήκες.
- Η *εξίσωση* που δηλώνει ότι η ισότητα ισχύει μόνο υπό συγκεκριμένες συνθήκες.

- **Ταυτότητα** λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

  για παράδειγμα:

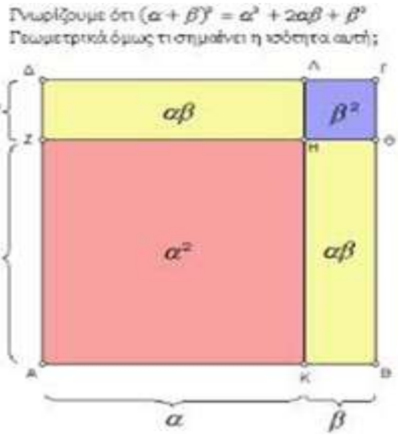
  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

- **Εξίσωση** στα μαθηματικά είναι ισότητα που συνδέει γνωστές ποσότητες με άγνωστες, τις οποίες θέλουμε να προσδιορίσουμε. Η εξίσωση λοιπόν είναι μια μαθηματική δήλωση που βεβαιώνει την ισότητα των δύο εκφράσεων. Στη σύγχρονη σημειογραφία, αυτό γράφεται τοποθετώντας εκφράσεις και στις δύο πλευρές από το σύμβολο ίσον, **για παράδειγμα:**

x +3= 5 βεβαιώνει ότι x+ 3 είναι ίσο με το 5.

Διασύνδεση Άλγεβρας - Γεωμετρίας

- **Γεωμετρική ερμηνεία της ταυτότητας $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$**



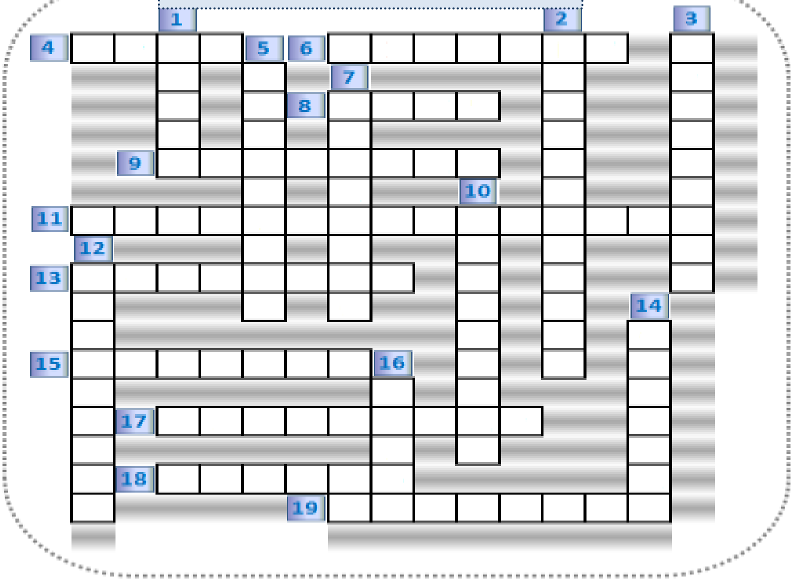
Η ταυτότητα $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$ για θετικούς αριθμούς α και β μπορεί να ερμηνευθεί και γεωμετρικά. Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά α+β, οπότε το εμβαδόν του είναι: Ε= $(α+β)^2$ (1). Το εμβαδόν όμως του τετραγώνου ΑΒΓΔ προκύπτει ακόμα και αν προσθέσουμε τα εμβαδά των σχημάτων που το αποτελούν. Δηλαδή Ε= $α^2$+ αβ+ αβ+ $β^2$ ή Ε= $α^2 + 2αβ + β^2$ (2). Από τις ισότητες (1) και (2) διαπιστώνουμε ότι $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$.

- Παρόμοια σκεπτόμενοι μπορούμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά και τις ταυτότητες:

  - $(α - β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2$
  - $(α + β + γ)^2 = α^2 + β^2 + γ^2 + 2αβ + 2βγ + 2αγ$.

Σταυρόλεξο - Αλγεβρικές παραστάσεις

Απευθύνεται σε μαθητές Γ' Γυμνασίου



Κάθετα

1. *Ονομάζονται δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.*
2. *Η εφαρμογή της ακόλουθης μεθόδου : «α(β+γ)=αβ+αγ» για την απλοποίηση της παράστασης ονομάζεται …… ιδιότητα.*
3. *Ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών.*
5. *Το γινόμενο της παράστασης (α+β) με τον εαυτό της μας δίνει το …… του (α+β).*
7. *Ένα πολυώνυμο της μορφής x^2+3x-6 ονομάζεται και …… δευτέρου βαθμού.*
10. *Το άθροισμα μονωνύμων, τα οποία δεν είναι όμοια μεταξύ τους ονομάζεται …… .*
12. *Οι αλγεβρικές παραστάσεις περιέχουν παραστάσεις, π.χ. της μορφής $α^2$, 3α όπου το α ονομάζεται …… .*
14. *Για να μπορέσουμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο ή περισσότερα ετερώνυμα κλάσματα θα πρέπει πρώτα να τα μετατρέψουμε σε …… .*
16. *Οι ταυτότητες $(α+β)^3$ και $(α-β)^3$ χαρακτηρίζονται και ως …… αθροίσματος και διαφοράς αντίστοιχα.*

Οριζόντια

4. *Ονομάζονται τα μονώνυμα που περιλαμβάνει μια αλγεβρική παράσταση.*

6. *Δύο μονώνυμα που είναι όμοια, έχουν το ίδιο κύριο μέρος με ίδιους ....*

8. *Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με έναν συγκεκριμένο αριθμό και εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε το αποτέλεσμα που θα προκύψει ονομάζεται αλγεβρική ....*

9. *Το ...... όμοιων μονωνύμων είναι ένα όμοιο με αυτά μονώνυμο που έχει συντελεστή το ...... των συντελεστών τους. (απαιτείται η ίδια λέξη και στα δύο κενά).*

11. *Για λόγους συντομίας και απλοποίησης των υπολογισμών μας, μετατρέπουμε μια παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο παραγόντων και η διαδικασία αυτή ονομάζεται ....*

13. *Τις αλγεβρικές παραστάσεις της μορφής* $\alpha^2, 3\beta, 5x^2$ *έχει επικρατήσει να τις ονομάζουμε ....*

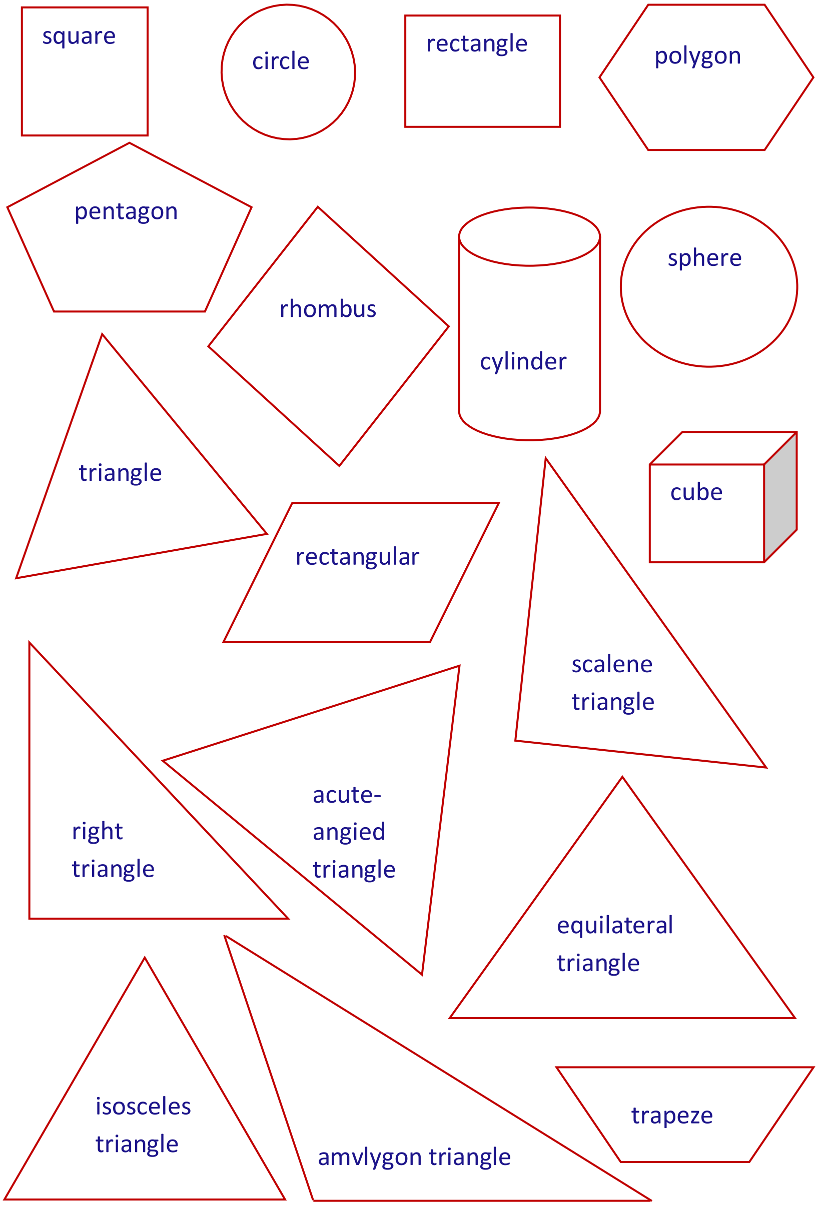
15. *...... ομοίων όρων ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία αντικαθιστούμε τους όμοιους όρους με το άθροισμά τους.*

17. *Η εκτέλεση των πράξεων στην αλγεβρική παράσταση* $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ *ονομάζεται ...... της ταυτότητας.*

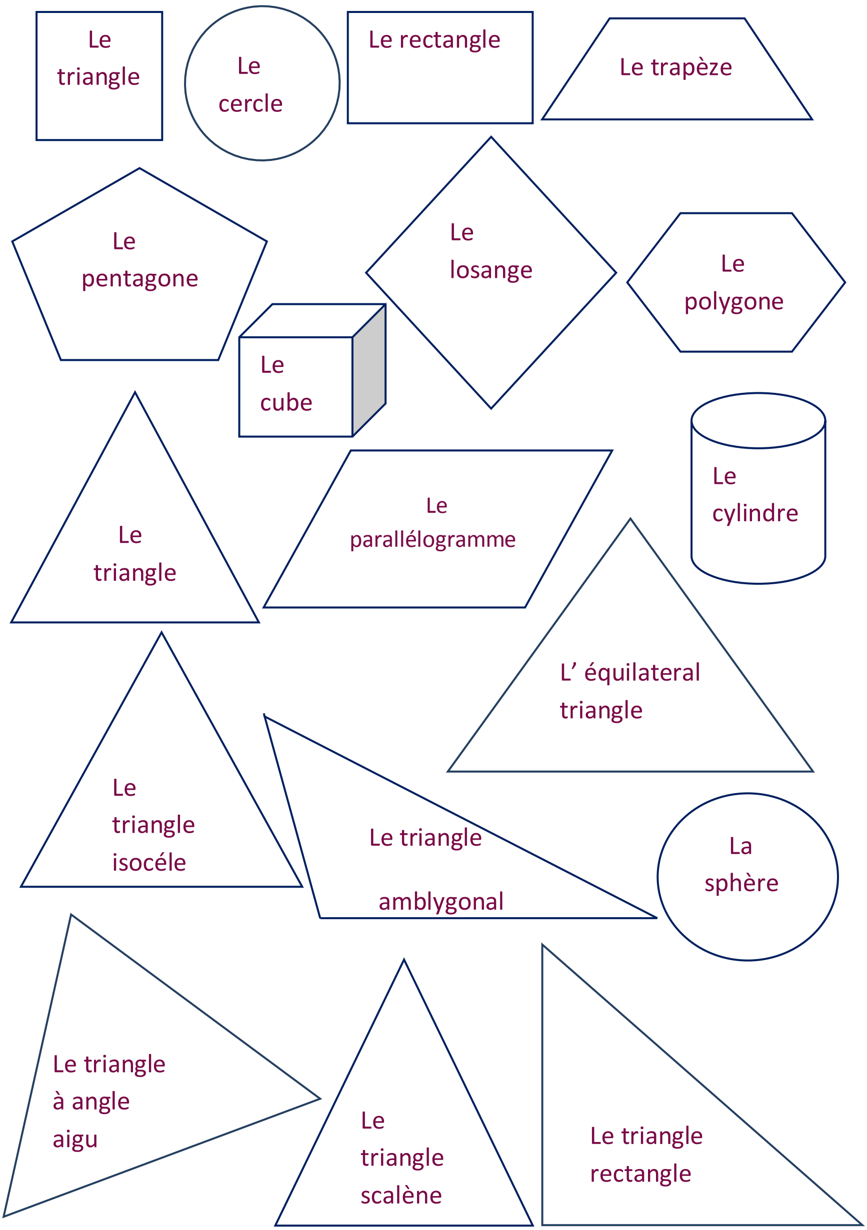
18. *Το γινόμενο των κλασμάτων* $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{3}{8}$ είναι ίσο με το ...... των κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{8}{3}$.

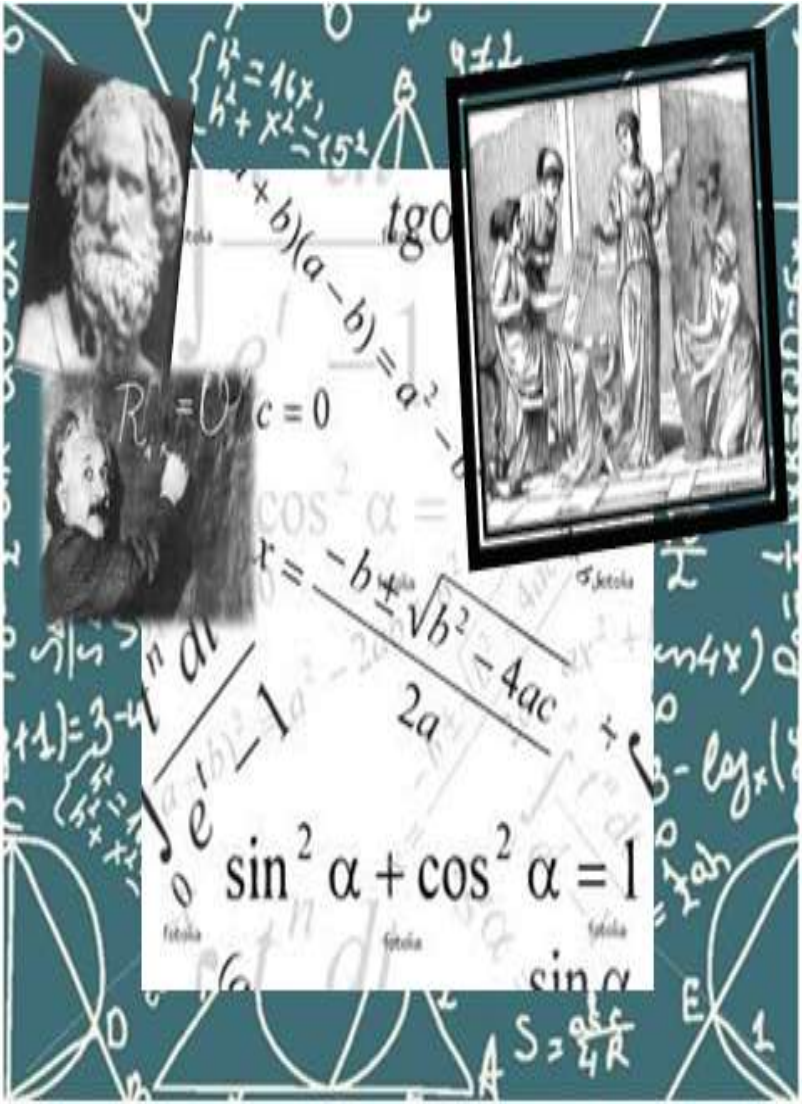
19. *Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα ...... που προκύπτουν.*

GEOMETRICAL SHAPES



les figures géometriques




c = 0
sin² α + cos² α = 1