Σχολή

Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

“Ασαφείς εκτιμητές και εφαρμογές”

Ζιώγας Χρήστος

Επιβλέπων Καθηγητής

Παπαδόπουλος Βασίλειος

Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Πάτρα

Μάιος, 2017

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική συνδέουμε την εκτιμητική από τη στατιστική με την εκτιμητική των ασαφών αριθμών. Αφετηρία μας οι σημειακοί εκτιμητές και τα διαστήματα εμπιστοσύνης της κλασικής στατιστικής. Οι ασαφείς εκτιμητές κατασκευάζονται αριθμητικά από τις α-τομές. Οι α-τομές του ασαφούς αριθμού εκφράζουν ένα διάστημα εμπιστοσύνης. Τοποθετώντας αυτά τα διαστήματα, το ένα στην κορυφή του άλλου παράγουμε έναν τριγωνικό ασαφή αριθμό, ο οποίος είναι ο ασαφής εκτιμητής. Με παραδείγματα, αναδεικνύουμε τα πλεονεκτήματα της μεθόδου. Συγκεκριμένα οι υπολογισμοί μεταξύ διαστημάτων είναι ευκολότερες και έχουμε όλη την πληροφορία της στατιστικής συγκεντρωμένη σε έναν ασαφή αριθμό, του οποίου οι α-τομές είναι διαστήματα εμπιστοσύνης.

Στη συνέχεια, παραθέτουμε τον προσδιορισμό των άγνωστων παραμέτρων διαφόρων κατανομών. Αυτό επιτυγχάνεται, αφού πρώτα προσεγγίσουμε τις παραμέτρους τους μ και σ^2. Ολοκληρώνοντας, αναφερόμαστε σε μια χρήσιμη εφαρμογή των ασαφών εκτιμητών που αφορά συστήματα ουρών αναμονής. Έτσι, προτείνεται μια καινοτόμος μέθοδος εκτίμησης των διαφόρων χαρακτηριστικών μιας ουράς αναμονής.

ABSTRACT

In this article we connect the estimation by the statistics view and the estimation by the fuzzy numbers’ view. We begin with the point estimators and the confidence intervals of classical statistics. Fuzzy estimators are constructed by a-cuts. A-cuts of a fuzzy number produce a confidence interval. Placing these confidence intervals, one on top of another, we produce a triangular fuzzy number, which is the fuzzy estimator. We use examples, to stress the advantages of the method. More specifically, the calculations between intervals are easier using this method and we have all the statistics data gathered with in a fuzzy number, the a–cuts of which are confidence intervals.

Then, we present the determination of the unknown parameters of different distributions. This is achieved by first approaching the parameters μ and σ^2. In the end, we refer to a useful application of fuzzy estimators which has to do with queuing systems. In this way, we suggest an innovative method of estimating the various characteristics of a queue.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Παπαδόπουλο Βασίλειο, για την πολύτιμη βοήθεια και την άψογη συνεργασία που είχαμε σε όλη τη διάρκεια πραγματοποίησης της μελέτης αυτής.

Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην γυναίκα μου Άσπα, για την υπομονή και την ηθική στήριξη που μου προσέφερε κατά την διάρκεια των σπουδών και την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

Αφιερώνεται στην κόρη μου

Αναστασία

Περιεχόμενα

Πρόλογος 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Θεωρία ασαφών συνόλων και ασαφής λογική

1.1 Εισαγωγή 6

1.2 Θεωρία ασαφών συνόλων 6

1.3 Ασαφείς αριθμοί 9

1.4 Πράξεις ασαφών συνόλων 11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Εκτιμητική στατιστική

2.1 Το πρόβλημα της εκτιμητικής 14

2.2 Σημειακή εκτίμηση 15

2.3 Εκτίμηση με διάστημα εμπιστοσύνης 18

2.4 Έμμεση εκτίμηση 19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Δημιουργία ασαφών εκτιμητών

3.1 Η έννοια των ασαφών εκτιμητών 21

3.2 Ασυμπτωτικοί ασαφείς εκτιμητές βασισμένοι σε διαστήματα εμπιστοσύνης . 23

3.3 Μη ασυμπτωτικοί ασαφείς εκτιμητές βασισμένοι σε διαστήματα εμπιστοσύνης 26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Χρήση ασαφών εκτιμητών

4.1 Γιατί είναι εύχρηστοι οι ασαφείς εκτιμητές; 30

4.2 Παραδείγματα 31

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Εκτίμηση παραμέτρων σε οποιαδήποτε κατανομή

5.1 Εισαγωγή 46

5.2 Εκτίμηση σε Poisson και σε εκθετική κατανομή 46

5.3 Εκτίμηση σε λογαριθμοκανονική κατανομή 49

5.4 Εκτίμηση σε ομοιόμορφη συνεχής κατανομή 52

5.5 Εκτίμηση σε διωνυμική και γεωμετρική κατανομή 54

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Εφαρμογές ασαφών εκτιμητών σε συστήματα ουρών αναμονής

6.1 Εισαγωγή στα συστήματα ουρών αναμονής 58

6.2 Χαρακτηριστικά συστημάτων ουρών αναμονής 58

6.3 Το μοντέλο M/M/s 60

6.4 Προσέγγιση ενός συστήματος ουρών αναμονής με τη μέθοδο των ασαφών εκτιμητών 63

6.5 Άσκηση 67

6.6 Συμπεράσματα 74

Επίλογος 75

Βιβλιογραφικές Αναφορές 76

Πρόλογος

Η ασαφής λογική δέχεται ότι ένα στοιχείο έχει τη δυνατότητα να ανήκει σε ένα σύνολο και να μην ανήκει στο ίδιο σύνολο, ανάλογα με το βαθμό συμμετοχής του σε αυτό. **Άλλωστε όλα είναι θέμα βαθμού, «everything is a matter of degree»** όπως υπογραμμίζει ο Zadeh. Συνεπώς, η ασαφής λογική αποτελεί μια πλειότιμη επέκταση της κλασικής δίτιμης λογικής.

Τα τελευταία χρόνια, οι εφαρμογές της ασαφούς θεωρίας συνόλων και της ασαφούς λογικής έχουν επηρεάσει αισθητά κάθε τομέα της επιστήμης και της τεχνολογίας, αφού ενέχουν τη δυνατότητα να μιμηθούν την ανθρώπινη κρίση για να εφαρμόσουν αποτελεσματικά τρόπους συλλογιστικής σε πεδία του πραγματικού κόσμου, που εμπεριέχουν ασάφεια ή αβεβαιότητα.

Μια σημαντική εφαρμογή των ασαφών συνόλων, είναι οι **ασαφείς εκτιμητές.** Από την κλασική στατιστική, είναι γνωστή η αναγκαιότητα της εκτίμησης των παραμέτρων μιας συνάρτησης κατανομής πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X. Επειδή η σημειακή εκτίμηση δεν παρέχει αρκετά ακριβή προσέγγιση για την εκτίμηση της παραμέτρου, η χρήση των διαστημάτων εμπιστοσύνης παίζει σημαντικό ρόλο. Οι α-τομές ενός ασαφούς αριθμού αποτελούν διαστήματα εμπιστοσύνης για την εκτιμώμενη παράμετρο. Ο ασαφής εκτιμητής αποτελεί ένα ασαφή αριθμό. Έτσι μπορούν να γίνονται εκτιμήσεις για πράξεις μεταξύ μεταβλητών από διαφορετικές κατανομές (π.χ. συντελεστή μεταβλητότητας), κάτι που με τις μεθόδους της στατιστικής επιστήμης μέχρι τώρα γενικά δεν γίνεται. Επιπλέον, μας παρέχεται η δυνατότητα να κάνουμε εύκολα πράξεις μεταξύ ασαφών εκτιμητών.

Με την βοήθεια των ασαφών εκτιμητών των παραμέτρων μ και σ^2, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους μιας κατανομής, εφόσον γνωρίζουμε τη γενική μορφή της. Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που επιθυμούμε.

Τέλος με τη μέθοδο της ασάφειας περιγράφονται τα χαρακτηριστικά συστημάτων ουρών αναμονής. Απαιτείται μόνο ένα σύνολο αμερόληπτων παρατηρήσεων, των χρόνων αφίξεων πελατών και των χρόνων εξυπηρέτησής τους. Μέσω του συνόλου αυτού κατασκευάζονται ασαφείς εκτιμητές για το μέσο ρυθμό άφιξης πελατών και το μέσο χρόνο εξυπηρέτησής τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Θεωρία ασαφών συνόλων και ασαφής λογική

1.1 Εισαγωγή

Το *1965*, ο Zadeh –μαθηματικός και μηχανικός - θεμελίωσε τη θεωρία των ασαφών συνόλων σαν μια μέθοδο διαχείρισης της ανακρίβειας που αντιμετωπίζεται σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Η ανακρίβεια ή η ασάφεια είναι ο πυρήνας των ασαφών συνόλων και της ασαφούς λογικής. Τα ασαφή σύνολα (fuzzy sets) ουσιαστικά αποτελούν μια γενίκευση των κλασικών συνόλων.

Η ασαφής λογική (fuzzy logic) αποτελεί σήμερα μια αναγνωρισμένη επιστημονική θεωρία, κυρίως πρακτικού χαρακτήρα, με προσανατολισμό στην επίλυση ή τουλάχιστον στην επίτευξη καλύτερων λύσεων από αυτές των υπόλοιπων επιστημών, ικανή για την αντιμετώπιση προβλημάτων με υψηλό βαθμό αβεβαιότητας.

1.2 Θεωρία ασαφών συνόλων

Ένα κλασσικό σύνολο *A* ως προς σύνολο αναφοράς *X*, μπορεί να παρασταθεί ισοδύναμα μέσω της χαρακτηριστικής του συνάρτησης:

$$I_A : X \to \{0,1\} \ \mu\varepsilon \ \ I_A(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad x \in A \\ 0 & \alpha\nu \quad x \notin A \end{cases}, \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\ \acute{\eta} \ \ A = \{x \in X, \ \ I_A(x) = 1\}$$

Για παράδειγμα, η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου *A={3,4,5}* ως προς σύνολο αναφοράς το σύνολο ακεραίων *Z*, είναι:

$$I_A : x \in Z \to I_A(x) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad x \in A = \{3,4,5\} \\ 0 & \alpha\nu \quad x \notin A \end{cases}$$

Αν θεωρηθεί ως σύνολο αφίξεως το κλειστό διάστημα *[0, 1]* αντί για το διμελές σύνολο *{0,1},* αυτόματα γενικεύεται η έννοια του κλασικού συνόλου. Έτσι προκύπτουν τα ασαφή σύνολα, τα οποία είναι επεκτάσεις των κλασικών συνόλων, ώστε να ισχύει ο νόμος της αντίφασης.

Σύμφωνα με τον Zadeh, έχουμε τον εξής ορισμό για τα ασαφή σύνολα:

Έστω *X* ένα σύνολο αναφοράς (κλασικό σύνολο). **Ονομάζουμε ασαφές υποσύνολο *A* του *X*, κάθε συνάρτηση** $\mu_A : X \to [0,1]$. Για κάθε $x \in X$, η τιμή

$\mu_A(x)$ ονομάζεται τιμή συμμετοχής και δηλώνει τον βαθμό συμμετοχής με τον οποίο το στοιχείο $x \in X$ ανήκει (συμμετέχει) στο *A*. Δηλαδή:

$\mu_A(x) = 1$, σημαίνει ότι το *x* ανήκει ολοκληρωτικά στο *A*,

$\mu_A(x) = 0$, σημαίνει ότι το *x* δεν ανήκει καθόλου στο *A*,

$0 < \mu_A(x) < 1$, σημαίνει ότι το *x* ανήκει μερικά, δηλ. κατά κάποιο βαθμό στο *A*.

Η συνάρτηση $\mu_A : X \to [0,1]$ ονομάζεται συνάρτηση συμμετοχής.

Συνεπώς έχουμε την επέκταση της έννοιας της χαρακτηριστικής συνάρτησης ενός κλασικού συνόλου *A*, δηλαδή $I_A : x \in X \to I_A(x) \in \{0,1\}$, στη συνάρτηση συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου *A*, $\mu_A : x \in X \to \mu_A(x) \in [0,1]$. Για να παραστήσουμε ένα ασαφές σύνολο *A* θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\tilde{A}$.

Παράδειγμα ασαφούς συνόλου: για να δημιουργήσουμε το ασαφές σύνολο «ακέραιοι αριθμοί κοντά στο *1*» αντιστοιχούμε βαθμό συμμετοχής *1* στον ακέραιο αριθμό *1*, 0 στους ακέραιους αριθμούς *-2* και *4*, *0.3* στους ακέραιους αριθμούς *-1* και *3*, *0.6* στους ακέραιους αριθμούς *0* και *2*. Επομένως, έχουμε το *X={-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}* και το ασαφές σύνολο

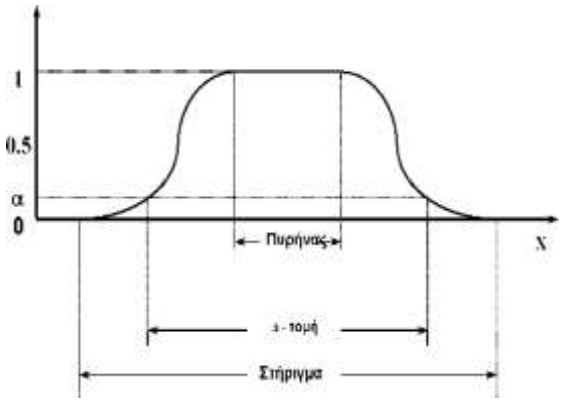
$$\tilde{A} = 0.0/-2 + 0.3/-1 + 0.6/0 + 1.0/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.0/4.$$

Στήριγμα ενός ασαφούς συνόλου $\tilde{A}$ ορίζεται το κλασικό σύνολο

$$(S)\tilde{A} = \{x \in X : \tilde{A}(x) > 0\}.$$

Σημαντικό ρόλο έχουν τα ασαφή σύνολα τα οποία έχουν συμπαγή στηρίγματα, δηλαδή κλειστά και περατωμένα (φραγμένα) υποσύνολα του *X*.

Πυρήνας ενός ασαφούς συνόλου ονομάζεται το σύνολο των τιμών για τις οποίες η συνάρτηση συμμετοχής έχει τιμή *1*.



Η *α*-τομή (*a*-cut) ενός ασαφούς συνόλου $\tilde{A}$ είναι το κλασικό σύνολο ${}^{\alpha}\left(\tilde{A}\right)$ που περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου *X*, των οποίων οι βαθμοί συμμετοχής στο $\tilde{A}$ είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι της συγκεκριμένης τιμής *α*. Δηλαδή

$${}^{\alpha}\left(\tilde{A}\right) = \{x \in X : \tilde{A}(x) \geq a\} \quad \gamma\iota\alpha \ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \ .$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Υποθέτουμε ότι *X={-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}* και

$\tilde{A} = 0.0/-2 \ + \ 0.3/-1 \ + \ 0.6/0 \ + \ 1.0/1 \ + \ 0.6/2 \ + \ 0.3/3 \ + 0.0/4$, τότε

$${}^{\alpha}\left(\tilde{A}\right) = \begin{cases} \{-1,0,1,2,3\} & \alpha\nu \quad 0 < \alpha \leq 0{,}3 \\ \{0,1,2\} & \alpha\nu \quad 0{,}3 < \alpha \leq 0{,}6 \\ \{1\} & \alpha\nu \quad 0{,}6 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Για κάθε ασαφές σύνολο $\tilde{A}$ **ισχύει:**

$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha \ {}^{\alpha}\left(\tilde{A}\right) = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha \, X_{\alpha A}$, όπου $X_{\alpha A}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του κλασικού συνόλου **(θεώρημα ανασύνθεσης).** Επομένως, ένα ασαφές σύνολο μπορεί να διασπαστεί σε μια οικογένεια κλασικών συνόλων (*α* – τομών), γεγονός που το καθιστά πολύ χρήσιμο, ιδιαίτερα όπου απαιτείται η μετατροπή σχέσεων μεταξύ ασαφών συνόλων σε σχέσεις μεταξύ των αντίστοιχων κλασικών *α* – τομών τους.

Περίβλημα του ασαφούς συνόλου $\tilde{A}$ είναι το κλασικό (όχι ασαφές) σύνολο ${}^{0}\left(\tilde{A}\right)$ το οποίο ισούται με το συμπλήρωμα όλων των α-τομών του $\tilde{A}$, δηλαδή για όλα τα $\alpha \in (0,1]$:

$${}^{0}\left(\tilde{A}\right) = \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]} {}^{\alpha}\left(\tilde{A}\right)} = \overline{\{x \in X, \ \tilde{A}(x) > 0\}} \, .$$

Κυρτό ασαφές σύνολο, χαρακτηρίζεται το σύνολο στο οποίο αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε σημεία του *A* και *B* στο χώρο μεταξύ του γραφήματος ενός ασαφούς συνόλου και του άξονα των *OX*, το ευθύγραμμο τμήμα *AB* βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στον χώρο αυτό.

1.3 Ασαφείς αριθμοί

Ένα ασαφές σύνολο $\tilde{A}$ **ονομάζεται ασαφής αριθμός** αν πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in R$, ώστε $\tilde{A}(x) = 1$.

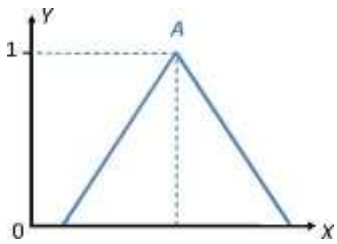
2) Το στήριγμα $S(\tilde{A})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του *R*.

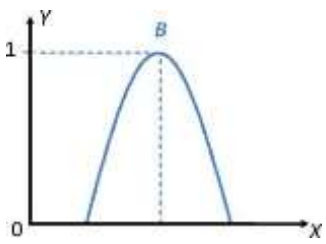
3) Ο χώρος μεταξύ του γραφήματος του $\tilde{A}$ και του άξονα ΟΧ είναι κυρτό σύνολο.

Οι ασαφείς αριθμοί είναι συνήθως τριγωνικοί ή τραπεζοειδείς.

Ένας τριγωνικός ασαφής αριθμός $\tilde{K}$ καθορίζεται από τρεις αριθμούς $a < b < c$, όπου η βάση ή στήριγμα του τριγωνικού αριθμού είναι το διάστημα $[a, c]$ και η κορυφή του είναι στο σημείο $x = b$, δηλαδή εκεί που η συνάρτηση συμμετοχής έχει την τιμή *1*. Έτσι, ο ασαφής τριγωνικός αριθμός $\tilde{K}$ γράφεται με τη μορφή $\tilde{K} = (a/b/c)$.

Οι ασαφείς τριγωνικοί αριθμοί, μπορεί να είναι της μορφής *A* ή *B* του παρακάτω σχήματος:





Οι τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί έχουν συμπαγές στήριγμα και αποτελούνται από μια συνάρτηση της μορφής:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} l(x) & \alpha\nu \quad a \le x \le \beta \\ r(x) & \alpha\nu \quad \beta \le x \le \gamma \end{cases}$$

με $l(\beta) = r(\beta) = 1$ και $l(x)$ αύξουσα συνάρτηση ενώ $r(x)$ φθίνουσα συνάρτηση.

Οι *α*-τομές ενός τριγωνικού ασαφούς αριθμού ορίζονται ως εξής:

$$^{a}\left(\tilde{A}\right) = \left[l^{-1}(a), r^{-1}(a)\right]$$

όπου l^{-1} και r^{-1} οι αντίστροφες συναρτήσεις των συναρτήσεων *l* και *r* αντίστοιχα.

Οι *α*-τομές ενός τριγωνικού και γενικά κάθε ασαφούς αριθμού έχουν τις εξής ιδιότητες:

i. Είναι συνήθη κλειστά πραγματικά διαστήματα, για κάθε $\alpha \in [0,1]$.

ii. Κάθε ασαφής αριθμός, μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα, πλήρως και μοναδικά, με χρήση του θεωρήματος ανασύνθεσης,

Η μαθηματική έκφραση της τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής είναι η εξής:

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le a \\ \dfrac{(x-a)}{(b-a)} & , \quad x \in (a,b] \\ \dfrac{(c-x)}{(c-b)} & , \quad x \in (b,c] \\ 0 & , \quad x > c \end{cases}$$

Ένας τραπεζοειδής ασαφής αριθμός $\tilde{\Lambda}$ καθορίζεται από τέσσερις αριθμούς $a < b < c < d$, όπου η βάση του τραπεζοειδούς αριθμού είναι το διάστημα *[a, d]* και η κορυφή (στην οποία η συνάρτηση συμμετοχής είναι *1*) είναι το διάστημα *[b, c]*. Ο ασαφής τραπεζοειδής αριθμός $\tilde{\Lambda}$ γράφεται με τη μορφή: $\tilde{\Lambda} = (a/b,\ c/d)$.

Η μαθηματική έκφραση της τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής είναι η εξής:

$$\tilde{\Lambda}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \dfrac{(x-a)}{(b-a)} & , \quad x \in [a,b) \\ 1 & , \quad x \in [b,c] \\ \dfrac{(d-x)}{(d-c)} & , \quad x \in (c,d] \\ 0 & , \quad x > d \end{cases}$$

1.4 Πράξεις ασαφών συνόλων

Έστω *X* ένα σύνολο αναφοράς (κλασικό σύνολο) και δύο ασαφή σύνολα $\tilde{A}$ και $\tilde{B}$, τα οποία ορίζουμε ως ασαφή υποσύνολα του *X*, δηλαδή ως συναρτήσεις της μορφής $\tilde{A}: X \to [0,1]$ *και* $\tilde{B}: X \to [0,1]$.

- **Ένωση δύο ασαφών συνόλων** $\tilde{A}$**,** $\tilde{B}$ είναι το ασαφές υποσύνολο του *X*, $\tilde{A} \cup \tilde{B}: X \to [0,1]$ που ορίζεται ως:

$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \max\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}$

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω ότι $\tilde{A}$ και $\tilde{B}$ είναι ασαφή υποσύνολα του *X={-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}*

$\tilde{A} = 0.6/-2 + 0.3/-1 + 0.6/0 + 1.0/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.0/4$

$\tilde{B} = 0.1/-2 + 0.3/-1 + 0.9/0 + 1.0/1 + 1.0/2 + 0.3/3 + 0.2/4$

Το $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$\tilde{A} \cup \tilde{B} = 0.6/-2 + 0.3/-1 + 0.9/0 + 1.0/1 + 1.0/2 + 0.3/3 + 0.4/4$

- **Τομή δύο ασαφών συνόλων** $\tilde{A}$**,** $\tilde{B}$ είναι το ασαφές υποσύνολο του *X*, $\tilde{A} \cap \tilde{B}: X \to [0,1]$ που ορίζεται ως:

$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \min\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}$.

- **Συμπλήρωμα ενός ασαφούς συνόλου** $\tilde{A}$ είναι το ασαφές υποσύνολο του *X*, $\tilde{A}^c: X \to [0,1]$ που ορίζεται ως:

$\tilde{A}^c(x) = 1 - \tilde{A}(x)$.

Οι βασικές ιδιότητες των πράξεων των κλασικών συνόλων ισχύουν και στην περίπτωση των ασαφών συνόλων, εκτός από την αρχή της αντίφασης και την αρχή του αποκλειόμενου τρίτου. Δηλαδή είναι: $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c \neq \varnothing$ και $\tilde{A} \cup \tilde{A}^c \neq X$.

Ένα μέτρο του κατά πόσο ένα ασαφές σύνολο $\tilde{A}$ περιέχεται σε ένα ασαφές σύνολο $\tilde{B}$, είναι ο **βαθμός υποσυνολότητας του συνόλου** $\tilde{A}$ **στο σύνολο** $\tilde{B}$. Συμβολίζεται

με $S(\tilde{A},\tilde{B})$ και ορίζεται ως εξής:

$$S\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=\frac{\left|\tilde{A}\cap\tilde{B}\right|}{\left|\tilde{A}\right|}=\frac{\sum_{x\in X}\min\left\{\tilde{A}(x),\tilde{B}(x)\right\}}{\sum_{x\in X}\tilde{B}(x)}$$

Τέλος, **στα ασαφή σύνολα ορίζονται οι τέσσερις πράξεις των ασαφών αριθμών,** δηλαδή πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση, οι οποίες γίνονται κυρίως μέσω των *α*-τομών των ασαφών αριθμών (είτε ισοδύναμα μέσω της αρχής επέκτασης[1]). Η αριθμητική των ασαφών αριθμών μετατρέπεται τελικά στη γνωστή αριθμητική των κλασικών διαστημάτων.

<u>Παράδειγμα:</u>

Να βρεθεί η διαφορά των παρακάτω ασαφών αριθμών:

$$\tilde{M}(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<7\\ \frac{x}{7}-1 & , \quad 7\le x\le 14\\ -\frac{x}{5}+\frac{19}{5} & , \quad 14<x\le 19\\ 0 & , \quad x>19\end{cases} \quad \text{και} \quad \tilde{N}(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<3\\ \frac{x}{2}-\frac{3}{2} & , \quad 3\le x\le 5\\ -\frac{x}{5}+\frac{10}{5} & , \quad 5<x\le 10\\ 0 & , \quad x>10\end{cases}$$

Βρίσκουμε πρώτα τις *α*-τομές των ασαφών αριθμών $\tilde{M}$ και $\tilde{N}$:

---

[1] Θεωρούμε δύο κλασικά σύνολα *X*, *Y* και μια συνάρτηση $f: x\in X\to f(x)=y\in Y$. Έστω $A: X\to I=[0,1]$ ένα ασαφές υποσύνολο του *X*. **Με την αρχή της επέκτασης** προσδιορίζουμε το ασαφές υποσύνολο *B* του Y μέσω της επέκτασης της *f* ως εξής:

$f(A): Y\to I=[0,1]$ $\mu\varepsilon$ $f(A)(y)=\max\{A(x): f(x)=y\}$.

Παρατηρήσεις:

a. Αν τα X, Y έχουν άπειρα στοιχεία τότε αντί για max θέτουμε sup.

b. Αν η f:X→Y είναι 1-1, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της f^{-1} τότε

$$f(A)(y)=\{A(x): f(x)=y\}=A(f^{-1}(y)).$$

Η αρχή της επέκτασης αποτελεί μια γενική μέθοδο ασαφοποίησης κλασικών μαθηματικών εννοιών. Δηλαδή, μπορούμε να επεκτείνουμε γνωστά μοντέλα ή μεθόδους με κλασικές μεταβλητές σε αντίστοιχες έννοιες με ασαφείς μεταβλητές.

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{m_1(a)}{7}-1 \\ a=\dfrac{-m_2(a)}{5}+\dfrac{19}{5} \end{array}\right\} \Leftrightarrow {}^{\alpha}\left(\tilde{\mathrm{M}}\right)=\left[m_1(a),m_2(a)\right]=\left[7a+7,\ -5a+19\right] \text{ και}$$

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{n_1(a)}{2}-\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{-n_2(a)}{5}+\dfrac{10}{5} \end{array}\right\} \Leftrightarrow {}^{\alpha}\left(\tilde{\mathrm{N}}\right)=\left[n_1(a),n_2(a)\right]=\left[2a+3,\ -5a+10\right]$$

Οπότε, για κάθε $0\le\alpha\le 1$ είναι:

$${}^{\alpha}\left(\tilde{\mathrm{M}}\right)-{}^{\alpha}\left(\tilde{\mathrm{N}}\right)=\left[m_1(a)-n_1(a),m_2(a)-n_2(a)\right]=\left[12a-3,\ -7a+16\right]$$

και αντίστροφα ως προς x, παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x=12a-3 \\ x=-7a+16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{x}{12}+\dfrac{3}{12} \\ a=\dfrac{-x}{7}+\dfrac{16}{7} \end{array}\right. .$$

Τελικά βρίσκουμε:

$$(\tilde{\mathrm{M}}-\tilde{\mathrm{N}})(x)=\left\{\begin{array}{lll} 0 & , & x<-3 \\ \dfrac{x}{12}+\dfrac{3}{12} & , & -3\le x\le 9 \\ -\dfrac{x}{7}+\dfrac{16}{7} & , & 9<x\le 16 \\ 0 & , & x>16 \end{array}\right.$$

(τα διαστήματα ως προς x, αφού $\alpha\in[0,1]$, είναι:

$0\le\dfrac{x}{12}+\dfrac{3}{12}\le 1\Leftrightarrow -3\le x\le 9$ και

$0\le-\dfrac{x}{7}+\dfrac{16}{7}\le 1\Leftrightarrow 9\le x\le 16$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. Εκτιμητική στατιστική

2.1 Το πρόβλημα της εκτιμητικής

Σε πολλές περιπτώσεις στην στατιστική, συναντώνται προβλήματα για τα οποία απαιτείται να εκτιμηθεί μία παράμετρος του υπό μελέτη πληθυσμού. Το πρόβλημα, στην απλούστερη μορφή του, είναι να εκτιμηθεί η τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού. Αυτό γίνεται μέσω «κατάλληλων» στατιστικών συναρτήσεων - ονομάζονται **εκτιμητές (estimators)** - που θα κατασκευάσουμε και θα μπορούμε να υπολογίσουμε από το δείγμα. Η περιοχή της στατιστικής που ασχολείται με το πρόβλημα αυτό λέγεται **εκτιμητική.**

Οι εκτιμητές είναι τυχαίες μεταβλητές και συνεπώς θα ακολουθούν κάποια κατανομή. Έτσι συνοδεύονται από μια συνάρτηση πιθανότητας *f(x)* που είναι αναγκαία, γιατί μας βοηθάει στον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Παράδειγμα:

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, τότε η πιθανότητα η X να βρίσκεται μεταξύ των τιμών α και β είναι:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

ενώ αν η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή ισχύει:

$$P(\alpha < X < \beta) = \sum_{\alpha < X_i < \beta} P(X = X_i)$$

όπου $P(X=X_i)$ είναι η πιθανότητα η μεταβλητή X να λάβει την τιμή X_i .

Δυο βασικές παράμετροι μιας κατανομής τυχαίας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διασπορά, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις:

- **Μέση τιμή:**

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \text{ αν } X \text{ συνεχής ή}$$

$$E(X) = \mu = \sum_{x_i \in X} x_i f(x_i) \text{ αν } X \text{ διακριτή.}$$

- **Διασπορά:**

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \text{ αν } X \text{ συνεχής ή}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x_i \in X} (x_i - \mu)^2 f(x_i) \text{ αν } X \text{ διακριτή.}$$

2.2 Σημειακή εκτίμηση

Η εκτίμηση μιας άγνωστης παραμέτρου ενός πληθυσμού μέσω της τιμής ενός εκτιμητή (για συγκεκριμένη πραγματοποίηση ενός τυχαίου δείγματος από τον πληθυσμό), ονομάζεται **σημειακή εκτίμηση (point estimation)** της παραμέτρου και ο εκτιμητής ονομάζεται **σημειακός εκτιμητής**. Είναι προφανές, ότι από κάθε πραγματοποίηση του τυχαίου δείγματος, παίρνουμε μια διαφορετική, κάθε φορά, σημειακή εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου του πληθυσμού.

Παράδειγμα:

Αν για ένα τυχαίο δείγμα, θέλουμε να εκτιμηθεί η μέση τιμή μ ενός πληθυσμού, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$ του δείγματος. Επίσης, αν ως εκτιμητής της άγνωστης πληθυσμιακής μέσης τιμής, δεν επιλεγεί η δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$, αλλά κατασκευαστεί μια άλλη στατιστική συνάρτηση, για παράδειγμα, η $T = \frac{X_{min} + X_{max}}{2}$ (δηλαδή το ημιάθροισμα της μικρότερης και της μεγαλύτερης τιμής του δείγματος), προκύπτει μια διαφορετική σημειακή εκτίμηση, για την ίδια πραγματοποίηση του τυχαίου δείγματος.

Ο εκτιμητής ως στατιστική συνάρτηση έχει τα χαρακτηριστικά μιας στατιστικής συνάρτησης, δηλαδή είναι τυχαία μεταβλητή, αλλά και γνωστός αριθμός ο οποίος στηρίζεται στις τιμές του τυχαίου δείγματος. Έτσι γεννιούνται δύο ερωτήματα:

i. Υπάρχει κάποια μέθοδος για να καθορίζουμε/κατασκευάζουμε εκτιμητές με βάση κάποια κριτήρια και όχι αυθαίρετα;
ii. Ποιο είναι το **«σφάλμα της εκτίμησης»** που κάνουμε, δηλαδή, πόσο κοντά στην πραγματική τιμή της παραμέτρου βρίσκεται η τιμή του εκτιμητή που υπολογίζουμε από την πραγματοποίηση ενός τυχαίου δείγματος;

Για το 1ο ερώτημα, η απάντηση είναι προφανώς ναι. Δύο πολύ γνωστές μέθοδοι κατασκευής εκτιμητών είναι, η **μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (method of maximum likelihood) και** η **μέθοδος των ροπών (method of moments).**

Επίσης υπάρχουν επιθυμητές ιδιότητες ή αλλιώς, κριτήρια «καλής συμπεριφοράς» των εκτιμητών, όπως: η **αμεροληψία**, η **συνέπεια** και η **αποτελεσματικότητα**. Συγκεκριμένα:

- **Ένας εκτιμητής $\hat{\theta}$ θα λέγεται αμερόληπτος (unbiased),** αν ο μέσος της δειγματικής του κατανομής ισούται με την υπό εκτίμηση παράμετρο θ του πληθυσμού. Αν δηλαδή:

$$\mathrm{E}\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

<u>Παραδείγματα:</u>

1) Ο δειγματικός μέσος $\overline{\mathrm{X}} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του μέσου ενός πληθυσμού, διότι $E(\overline{\mathrm{X}}) = \dfrac{\sum \mathrm{E}(\mathrm{X}_i)}{n} = \dfrac{n\mu}{n} = \mu$.

2) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α_i, $i=1, 2,\ldots, n$ με $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, η στατιστική συνάρτηση $T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ, οποιουδήποτε πληθυσμού. Πράγματι

$$E[\mathrm{T}] = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = E[a_1 X_1] + \ldots + E[a_n X_n] = a_1\mu + \ldots + \alpha_n\mu = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)\mu = \mu.$$

3) Η εκτίμηση της διασποράς $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{\mathrm{X}})^2$, για οποιονδήποτε πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της πληθυσμιακής διασποράς σ^2.

- **Ένας εκτιμητής ονομάζεται συνεπής (consistent)** αν, καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος, η εκτίμηση γίνεται καλύτερη/ακριβέστερη, δηλαδή, οι τιμές του εκτιμητή πλησιάζουν στην τιμή της παραμέτρου.

<u>Παραδείγματα:</u>

1) Συνεπής εκτιμητής της πληθυσμιακής μέσης τιμής μ είναι η δειγματική μέση τιμή $\overline{\mathrm{X}}$.

2) Η αμερόληπτη δειγματική διασπορά S^2, είναι συνεπής εκτιμητής της πληθυσμιακής διασποράς σ^2.

- **Ένας αμερόληπτος εκτιμητής $\hat{\theta}_1$ μιας παραμέτρου θ, ονομάζεται πιο αποτελεσματικός (more efficient)** από έναν άλλο αμερόληπτο εκτιμητή $\hat{\theta}_2$, της ίδιας παραμέτρου θ, αν $Var\left(\hat{\theta}_1\right) < Var\left(\hat{\theta}_2\right)$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Από όλους τους εκτιμητές της μέσης τιμής μ ενός πληθυσμού της μορφής $T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ με $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, την μικρότερη διασπορά έχει αυτός για τον οποίο $a_i = \frac{1}{n}$, για κάθε $i=1, 2,.. ., n$, δηλαδή η δειγματική μέση τιμή $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Πράγματι

$$Var\left(\overline{X}\right) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Επομένως, θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι, η στατιστική συνδέεται με τη θεωρία πιθανοτήτων με τους αμερόληπτους εκτιμητές των παραμέτρων μ και σ της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X.

Όσον αφορά το *2ο* ερώτημα που αφορά το σφάλμα εκτίμησης που κάνουμε. Όπως είδαμε, με τις επιθυμητές ιδιότητες των εκτιμητών, ουσιαστικά, ζητάμε, οι τιμές του εκτιμητή (σε επαναλαμβανόμενες δειγματοληψίες) να βρίσκονται, με μεγάλη πιθανότητα, κοντά στην πραγματική τιμή της παραμέτρου, δηλαδή, το σφάλμα της εκτίμησης να είναι μικρό, με μεγάλη πιθανότητα.

Όμως, αντί να δίνουμε ένα μόνο αριθμό (μια σημειακή εκτίμηση) ως εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου του πληθυσμού, μπορούμε να δίνουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης, δηλαδή, ένα διάστημα το οποίο να περιέχει, με δεδομένη εμπιστοσύνη (πιθανότητα), την εκτιμώμενη παράμερο. Μια τέτοια εκτίμηση λέγεται **εκτίμηση διαστήματος (interval estimation)**.

2.3 Εκτίμηση με διάστημα εμπιστοσύνης

Ένα ***100(1 - α) %* διάστημα εμπιστοσύνης** ($0 < \alpha < 1$), για μια παράμετρο ενός πληθυσμού, είναι ένα διάστημα που υπολογίζεται από ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό και έχει πιθανότητα $1-\alpha$ να περιέχει την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Η πιθανότητα $1-\alpha$ ονομάζεται **βαθμός εμπιστοσύνης** του διαστήματος.

Έτσι, κατασκευάζοντας για μια άγνωστη παράμετρο ενός πληθυσμού, ένα $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης, δίνουμε ως εκτίμησή της, όχι έναν αριθμό (μια σημειακή εκτίμηση) αλλά δύο αριθμούς που ορίζουν ένα διάστημα το οποίο περιέχει την άγνωστη παράμετρο με ορισμένη πιθανότητα, ίση με $1-\alpha$. Η πιθανότητα αυτή ορίζεται, φυσικά, να είναι μεγάλη (συνήθως, ίση με *0.90 ή 0.95 ή 0.98 ή 0.99)*. Η πιθανότητα α καλείται **επίπεδο (ή στάθμη) σημαντικότητας** και είναι η συμπληρωματική πιθανότητα της $1-\alpha$. Τα άκρα του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι στατιστικές συναρτήσεις. Είναι προφανές, ότι από πραγματοποίηση σε πραγματοποίηση του δείγματος, το διάστημα εμπιστοσύνης, εν γένει, μεταβάλλεται, είναι δηλαδή, **τυχαία μεταβλητή.**

Ο γενικός αλγόριθμος υπολογισμού του διαστήματος εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ του πληθυσμού είναι ο εξής:

a. Υπολογίζουμε από ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n μια εκτίμηση $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ.
b. Προσδιορίζουμε την πιθανότητα $p = 1-\alpha$ με την οποία θέλουμε να βρίσκεται η θ στο διάστημα αυτό.
c. Υπολογίζουμε τα άκρα $\hat{\theta}-\varepsilon$ και $\hat{\theta}+\varepsilon$ του διαστήματος εμπιστοσύνης.
d. Το διάστημα εμπιστοσύνης είναι $\left[\hat{\theta}-\varepsilon, \hat{\theta}+\varepsilon\right]$, δηλαδή ισχύει $\theta \in \left[\hat{\theta}-\varepsilon, \hat{\theta}+\varepsilon\right]$ με πιθανότητα $p = 1-\alpha$ και επομένως σε όρους πιθανοτήτων $P\left(\hat{\theta}-\varepsilon \le \theta \le \hat{\theta}+\varepsilon\right) = p$.

<u>Παράδειγμα:</u>

$100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ, ενός πληθυσμού που ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή διασπορά σ^2.

Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Τότε $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, για κάθε $i=1, 2, \ldots, n$. Στην περίπτωση αυτή γνωρίζουμε ότι η κατανομή της δειγματικής μέσης τιμής $\overline{X}$, είναι κανονική με μέση τιμή μ και διασπορά $\frac{\sigma^2}{n}$. Επομένως, $\frac{\left(\bar{X}-\mu\right)\sqrt{n}}{\sigma} = Z \sim N(0,1)$.

Η Z παίρνει τιμές στο συμμετρικό διάστημα $\left[-z_{a/2}, z_{a/2}\right]$ με πιθανότητα $1 - \alpha$. Δηλαδή,

$P\left(-z_{a/2} \le Z \le z_{a/2}\right) = 1 - a$ και τελικά

$P\left(\overline{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$. Αυτό σημαίνει ότι το τυχαίο διάστημα, $\left[\overline{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, περιέχει τη μέση τιμή του πληθυσμού με πιθανότητα $1-\alpha$ και αποτελεί ένα $100(1 - \alpha)$ % διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού.

2.4 Έμμεση εκτίμηση

Για την έμμεση εκτίμηση των παραμέτρων ενός πληθυσμού χρησιμοποιείται η **μέθοδος των ροπών**. Το σκεπτικό αυτής της μεθόδου είναι το εξής: εξισώνονται οι ροπές οι δειγματικές με τις θεωρητικές. Έτσι συνδέονται οι εκτιμώμενες παράμετροι με στατιστικές συναρτήσεις και από τη λύση των εξισώσεων που προκύπτουν, υπολογίζονται οι εκτιμητές.

Έστω $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\theta)$, $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$. Λαμβάνουμε τις m πρώτες δειγματικές ροπές περί την αρχή

$$m_k^{'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \; k = 1, \ldots, m$$

και τις εξισώνουμε με τις αντίστοιχες ροπές του πληθυσμού (θεωρητικές)

$$\mu_k^{'} = E\left(X^{\kappa}\right) = \int x^k f(x;\theta)dx = g_k(\theta), \; k = 1, \ldots, m.$$

Τότε έχουμε το σύστημα

$$g_k(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

η επίλυση του οποίου μας δίνει τους εκτιμητές με την μέθοδο των ροπών.

Παράδειγμα:

Έστω $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίο δείγμα προερχόμενο από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$. Να βρεθούν με τη μέθοδο των ροπών εκτιμητές για τα μ, σ^2.

Γνωρίζουμε ότι:

$$\mu_1' = E(X) = \mu \quad \kappa\alpha\iota \quad \mu_2' = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Ακόμη γνωρίζουμε ότι όταν δοθεί ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n, οι πρώτες δύο δειγματικές ροπές δίνονται από τις σχέσεις:

$$m_1' = \frac{1}{n}\sum X_i \quad \kappa\alpha\iota \quad m_2' = \frac{1}{n}\sum X_i^2$$

Θέτουμε $m_1 = E(X) \quad \kappa\alpha\iota \quad m_2 = E(X^2)$, οπότε παίρνουμε το σύστημα

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς μ και σ^2, λαμβάνουμε εκτιμητές

$$\hat{\mu} = \overline{X} \quad \text{και}$$

$$(\hat{\sigma})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Δημιουργία ασαφών εκτιμητών

3.1 Η έννοια των ασαφών εκτιμητών

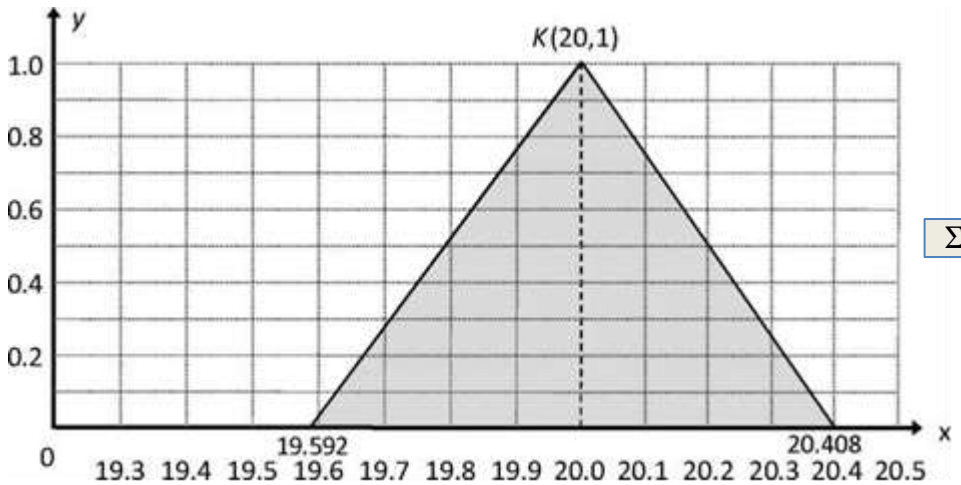
Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τη δημιουργία ενός ασαφούς εκτιμητή, ξεκινώντας με το παρακάτω παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα X_1 , X_2,..., X_n με $n = 40$, του οποίου η δειγματική μέση τιμή είναι $\overline{X} = 20$ (η μέση τιμή μ είναι άγνωστη) και η διασπορά $\sigma^2 = 1$. Αρχικά θα βρούμε το 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ.

Το διάστημα εμπιστοσύνης στο οποίο ανήκει με πιθανότητα $1-\alpha = 0,99$ η μ, είναι:

$$\left[\overline{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[20 - 2.576\frac{1}{\sqrt{40}},\ 20 + 2.576\frac{1}{\sqrt{40}}\right] = [19.592,\ 20.408].$$

Κατασκευάζουμε ένα τρίγωνο (σχήμα *1*) χρησιμοποιώντας αυτό το διάστημα εμπιστοσύνης για βάση του τριγώνου, με κέντρο το μέσο του διαστήματος εμπιστοσύνης που είναι η τιμή *20*, αριστερό και δεξιό άκρο τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης και κορυφή το σημείο *K(20,1)*.



Σχήμα 1

Έτσι προκύπτει ένα ασαφές σύνολο, ορισμένο πάνω στο *99%* διάστημα εμπιστοσύνης *[19.592, 20.408]*. Το ασαφές σύνολο μπορεί να γίνει ένας ασαφής αριθμός. Γι' αυτό πρέπει να προσδιορίσουμε μία συνάρτηση συμμετοχής, που θα περιγράφει την αριστερή και δεξιά πλευρά του τριγώνου. Θέτοντας:

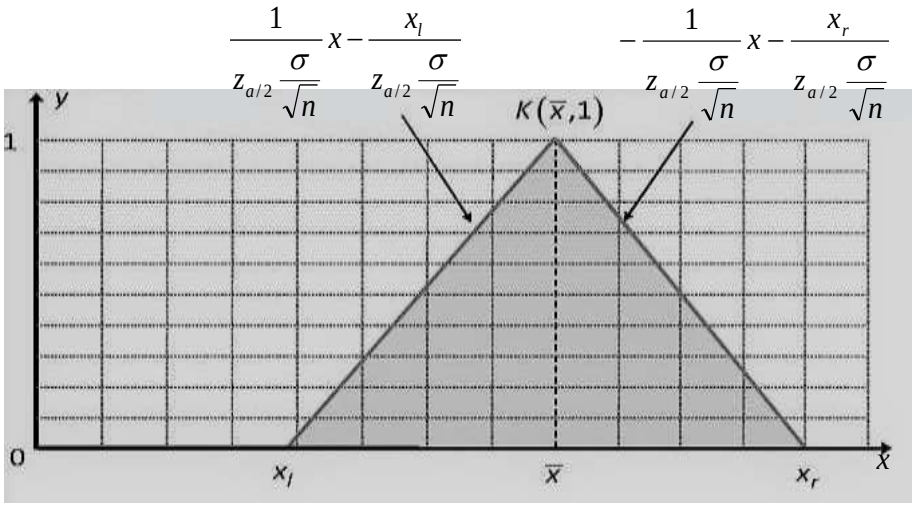
$$x_l(a) = \overline{X} - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad x_r(a) = \overline{X} + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

να είναι τα άκρα των διαστημάτων των *α*-τομών του ασαφούς αριθμού, όπου x_l (l: left) το αριστερό άκρο (αύξουσα συνάρτηση ως προς *a*) και x_r (r: right) το δεξί άκρο (φθίνουσα συνάρτηση ως προς *a*), έχουμε τη συνάρτηση συμμετοχής:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<x_l \\ \dfrac{1}{z_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}x-\dfrac{x_l}{z_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} & , \quad x_l \le x \le \overline{X} \\ -\dfrac{1}{z_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}x-\dfrac{x_r}{z_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} & , \quad \overline{X} \le x \le x \\ 0 & , \quad x>x_r \end{cases}$$

Όπως γνωρίζουμε, η *F(x)* προκύπτει από τις αντίστροφες συναρτήσεις x_l^{-1} και x_r^{-1} των άκρων x_l και x_r των διαστημάτων των *α*-τομών του ασαφούς αριθμού.

Το σχήμα *2* δείχνει τον παραπάνω ασαφή αριθμό που κατασκευάσαμε, όπου η τεθλασμένη καμπύλη δίνεται από τη συνάρτηση συμμετοχής *F(x)*.



Σχήμα 2

Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να ασαφοποιήσουμε πρόχειρα εκτιμητές με τη βοήθεια ενός δείγματος. Σε κάθε εκτιμητή αντιστοιχεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης, στο οποίο αντιστοιχεί και ένας ασαφής εκτιμητής. Έτσι σε αντίθεση με τις συναρτήσεις πιθανότητας, είναι πλέον δυνατό να κάνουμε εύκολα πράξεις μεταξύ ασαφών εκτιμητών, από τη στιγμή που αυτοί αποτελούν ασαφείς αριθμούς. Για

παράδειγμα αν θέλουμε να υπολογίσουμε το συντελεστή μεταβλητότητας δ μιας τυχαίας μεταβλητής ($\delta=\sigma/\mu$) και έχουμε τον ασαφή εκτιμητή του σ και τον ασαφή εκτιμητή του μ, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον ασαφή εκτιμητή του δ, σε αντίθεση με τις στατιστικές μεθόδους.

3.2 Ασυμπτωτικοί ασαφείς εκτιμητές βασισμένοι σε διαστήματα εμπιστοσύνης

Πρόκειται για μία μέθοδο κατασκευής ασαφών εκτιμητών, για τις παραμέτρους μιας δεδομένης συνάρτησης κατανομής πιθανότητας, χρησιμοποιώντας στατιστικά δεδομένα. Με τη βοήθεια των ασαφών αριθμών, ορίζουμε ασαφείς εκτιμητές για κάθε εκτιμώμενη παράμετρο, μέσω των διαστημάτων εμπιστοσύνης. Για μικρές τιμές της στάθμης σημαντικότητας α (δηλαδή όταν το α είναι πολύ κοντά στο 0) το περίβλημα του ασαφούς εκτιμητή εκτείνεται από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση ο ασαφής εκτιμητής θα είναι **ασυμπτωτικός** (asymptotic fuzzy estimator). Στα επόμενα, θα συμβολίζουμε τη στάθμη σημαντικότητας με γ αντί του α, για να μην παρερμηνευτεί με τις τιμές α των α-τομών.

Η μέθοδος είναι η εξής:

Γνωρίζουμε ότι, οι α-τομές ενός ασαφούς αριθμού $\tilde{A}$ μπορούν να γραφούν ως διαστήματα της μορφής:

$^{a}\left(\tilde{A}\right)=\left[A_l(a),\ A_r(a)\right]$, όπου A_l και A_r συναρτήσεις στο $[0,1]$.

Θεωρούμε όλα τα διαστήματα $[\theta_l(\alpha),\ \theta_r(\alpha)]$ για όλα τα α τέτοια ώστε $\gamma \le \alpha < 1$. Επιπλέον, θεωρούμε το διάστημα $[\theta', \theta']$ για $\alpha=1$ και τα διαστήματα $[\theta_l(\gamma),\ \theta_r(\gamma)]$ για όλα τα $0 \le \alpha < \gamma$. Επικαλύπτοντας όλα αυτά τα διαστήματα μεταξύ τους (το ένα πάνω στο άλλο), έχουμε κατασκευάσει ένα ασαφή αριθμό $\tilde{\theta}$, του οποίου οι α-τομές θα είναι αυτά ακριβώς τα διαστήματα. Παρατηρούμε ότι το γ αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη α-τομή του ασαφούς αριθμού, δηλαδή στο μεγαλύτερο διάστημα. Έτσι, το επίπεδο σημαντικότητας γ και άρα το $(1-\gamma)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη δημιουργία του αντίστοιχου ασαφούς εκτιμητή που δημιουργείται από αυτό ακριβώς το διάστημα.

Τελικά ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\theta}$ σχηματίζεται από την επικάλυψη όλων των *α*-τομών του που δίνονται ως εξής:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\theta}\right)=\begin{cases}[\theta_l(\alpha),\,\theta_r(\alpha)] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha\in[\gamma,1]\\ [\theta_l(\gamma),\,\theta_r(\gamma)] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha\in[0,\gamma]\end{cases}$$

όπου $\theta_l(\alpha)$ αύξουσα συνάρτηση ίση με το κάτω άκρο του *(1-γ)100%* διαστήματος εμπιστοσύνης και $\theta_r(\alpha)$ φθίνουσα συνάρτηση ίση με το αντίστοιχο πάνω άκρο του εν λόγω διαστήματος.

Το περίβλημα $^{0}\left(\tilde{\theta}\right)$ του $\tilde{\theta}$, που είναι ακριβώς ο κάτω κλάδος της μορφής του $^{\alpha}\left(\tilde{\theta}\right)$ για $\alpha\in[0,\gamma)$ και συγκεκριμένα για *α=0*, θα ισούται με το *(1-γ)100%* διάστημα εμπιστοσύνης που δίνει η στατιστική. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι σε κάθε διάστημα εμπιστοσύνης αντιστοιχεί και ένας ασαφής εκτιμητής.

Γραφικά, οι *α*-τομές σχηματίζονται στον οριζόντιο άξονα και περιέχουν τιμές της μεταβλητής *X*, ενώ το *α* των *α* - τομών του ασαφούς εκτιμητή λαμβάνει όλες τις τιμές του από το *0* μέχρι το *1* στον κάθετο άξονα. Έτσι, δημιουργείται το τριγωνικό σχήμα του ασαφούς εκτιμητή $\tilde{\theta}$.

<u>Παράδειγμα</u>:

Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή *X* και ένα δείγμα X_1 , X_2,..., X_n με *n = 40*, του οποίου η δειγματική μέση τιμή είναι $\overline{X}=20$ (η μέση τιμή *μ* είναι άγνωστη) και η διασπορά $\sigma^2=1$.

Για επίπεδο σημαντικότητας *γ=0.01*, ένα *99%* διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της *μ* – όπως διαπιστώσαμε σε προηγούμενη ενότητα – είναι το διάστημα $\left[\overline{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=[19.592, 20.408]$. Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}$ που σχηματίζεται για τη *μ* θα είναι ο ασαφής αριθμός με *α* – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}\right)=\begin{cases}[\mu_l(\alpha),\,\mu_r(\alpha)] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha\in[0.01,\,1]\\ [\mu_l(\gamma),\,\mu_r(\gamma)] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha\in[0,\,0.01]\end{cases}$$

Έχουμε

$$ {}^{\alpha}\left(\tilde{\mu}\right) = \begin{cases} \left[20 - z_{a/2}\dfrac{1}{\sqrt{40}},\ 20 + z_{a/2}\dfrac{1}{\sqrt{40}}\right] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha \in [0.01,\ 1] \\ \left[20 - z_{0.01/2}\dfrac{1}{\sqrt{40}},\ 20 + z_{0.01/2}\dfrac{1}{\sqrt{40}}\right] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha \in [0,\ 0.01] \end{cases} $$

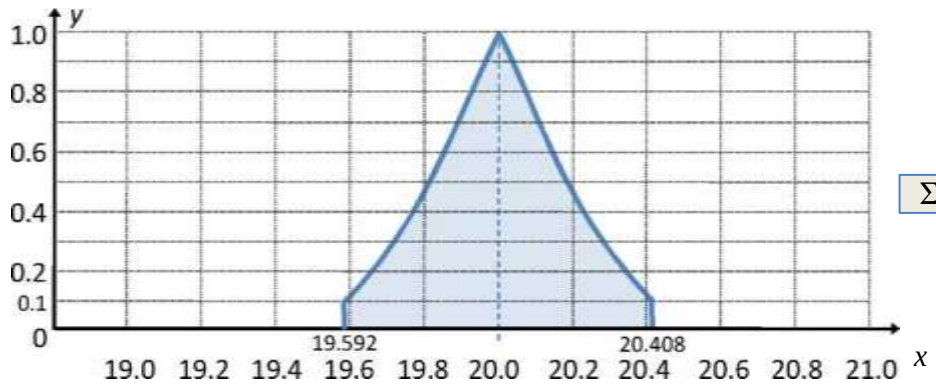
άρα

$$ {}^{\alpha}\left(\tilde{\mu}\right) = \begin{cases} \left[20 - z_{a/2}\dfrac{1}{\sqrt{40}},\ 20 + z_{a/2}\dfrac{1}{\sqrt{40}}\right] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha \in [0.01,\ 1] \\ \left[20 - 2.58\dfrac{1}{\sqrt{40}},\ 20 + 2.58\dfrac{1}{\sqrt{40}}\right] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha \in [0,\ 0.01] \end{cases} $$

Τελικά

$$ {}^{\alpha}\left(\tilde{\mu}\right) = \begin{cases} \left[20 - z_{a/2}\dfrac{1}{\sqrt{40}},\ 20 + z_{a/2}\dfrac{1}{\sqrt{40}}\right] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha \in [0.01,\ 1] \\ [19.592,\ 20.408] & \gamma\iota\alpha \quad \alpha \in [0,\ 0.01] \end{cases} $$

Ο παραπάνω ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}$ δημιουργήθηκε από τις *α*-τομές του, με το διάστημα *[19.592, 20.408]* για $\alpha \in [0,\ 0.01)$ να είναι το περίβλημά του ${}^{0}\left(\tilde{\mu}\right)$, το οποίο ισούται με το *99%* διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της μέσης τιμής από αυτό το δείγμα. Επομένως, σε αυτό το *99%* διάστημα αντιστοιχεί ο ασαφής εκτιμητής που κατασκευάσθηκε στο σχήμα *3*.



Σχήμα 3

3.3 Μη ασυμπτωτικοί ασαφείς εκτιμητές βασισμένοι σε διαστήματα εμπιστοσύνης

Στους μη ασυμπτωτικούς ασαφείς εκτιμητές (non asymptotic fuzzy estimators) το περίβλημα είναι κλειστό και φραγμένο. Γι' αυτό το λόγο θεωρούνται ολοκληρωμένοι ασαφείς εκτιμητές.

Στην περίπτωση που το στατιστικό δείγμα είναι μεγάλο ($\eta > 30$), χρησιμοποιούμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διασπορά και τη μέση τιμή από την κανονική κατανομή. Αυτή η επιλογή πραγματοποιείται με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα. Στην περίπτωση που το δείγμα είναι μικρό ($n < 30$) χρησιμοποιούμε την κατανομή Student, η οποία είναι κατάλληλη για περιπτώσεις όπου το στατιστικό δείγμα είναι μικρό.

Πρόταση 1

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι παρατηρήσεις για το δείγμα. Έστω επίσης $\gamma \in [0,1)$. Εάν το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο τότε,

$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1-\gamma}\Phi\left(\dfrac{x-\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \dfrac{\gamma}{1-\gamma} & \alpha\nu \quad \overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\gamma}{2}\right) \le x \le \overline{X} \\ \dfrac{2}{1-\gamma}\Phi\left(\dfrac{\overline{X}-x}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \dfrac{\gamma}{1-\gamma} & \alpha\nu \quad \overline{X} \le x \le \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\gamma}{2}\right) \end{cases}$$

είναι ένας ασαφής αριθμός το περίβλημα του οποίου είναι ακριβώς το $(1-\gamma)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ και οι α – τομές αυτού του ασαφούς αριθμού είναι τα κλειστά διαστήματα:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}\right) = \left[\overline{X} - z_{g(a)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{g(a)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \quad \gamma\iota\alpha \quad \alpha \in (0,1].$$

Τα διαστήματα αυτά είναι ακριβώς τα $(1-\alpha)(1-\gamma)$ διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ, όπου

$g(a) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\alpha + \frac{\gamma}{2}$, $\left(g : [0,1] \to \left[\frac{\gamma}{2}, 0.5\right]\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $z_{g(a)} = \Phi^{-1}(1-g(a))$ η βοηθητική γραμμική συνάρτηση ενώ

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad X \sim N(0,1).$$

Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με $n=100$, του οποίου η δειγματική μέση τιμή είναι $\overline{X}=40$ (η μέση τιμή μ είναι άγνωστη) και η διακύμανση $\sigma^2=16$. Θα κατασκευάσουμε ασαφή εκτιμητή για την μ.

Για $\gamma=0.1$ έχουμε:

$$\tilde{\mu}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1-0.1}\Phi\left(\dfrac{x-40}{4/\sqrt{100}}\right)-\dfrac{0.1}{1-0.1} & \alpha\nu \quad 40-\dfrac{4}{\sqrt{100}}\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{0.1}{2}\right)\le x\le 40\\[2ex] \dfrac{2}{1-0.1}\Phi\left(\dfrac{40-x}{4/\sqrt{100}}\right)-\dfrac{0.1}{1-0.1} & \alpha\nu \quad 40\le x\le 40+\dfrac{4}{\sqrt{100}}\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{0.1}{2}\right)\end{cases}$$

$$\tilde{\mu}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{0.9}\Phi\left(\dfrac{x-40}{4/\sqrt{100}}\right)-\dfrac{0.1}{0.9} & \alpha\nu \quad 37.45\le x\le 40\\[2ex] \dfrac{2}{0.9}\Phi\left(\dfrac{40-x}{4/\sqrt{100}}\right)-\dfrac{0.1}{0.9} & \alpha\nu \quad 40\le x\le 42.25\end{cases}$$

Πρόταση 2

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι παρατηρήσεις για το δείγμα. Έστω επίσης $\gamma\in[0,1)$. Εάν το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο τότε,

$$\tilde{\mu}(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\gamma}{1-\gamma}-\dfrac{2}{1-\gamma}\Phi\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{2}}\left(\dfrac{s^2}{x}-1\right)\right) & \alpha\nu \quad \dfrac{s^2}{1+\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}}\le x\le s^2\\[2ex] \dfrac{2-\gamma}{1-\gamma}-\dfrac{2}{1-\gamma}\Phi\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{2}}\left(1-\dfrac{s^2}{x}\right)\right) & \alpha\nu \quad s^2\le x\le \dfrac{s^2}{1+\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\gamma}{2}\right)\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}}\end{cases}$$

είναι ένας ασαφής αριθμός η βάση του οποίου είναι ακριβώς το $1-\gamma$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά s^2 και οι α – τομές αυτού του ασαφούς αριθμού είναι τα κλειστά διαστήματα:

$$\alpha\left(\tilde{\mu}\right)=\left[\frac{s^2}{1+z_{g(a)}\sqrt{\frac{2}{n-1}}},\ \frac{s^2}{1-z_{g(a)}\sqrt{\frac{2}{n-1}}}\right].$$

Τα διαστήματα αυτά είναι ακριβώς τα *(1-α)(1-γ)* διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διασπορά s^2, όπου

$$g(a)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\alpha+\frac{\gamma}{2},\ \left(g:[0,1]\to\left[\frac{\gamma}{2},\ 0.5\right]\right)\quad \kappa\alpha\iota\quad z_{g(a)}=\Phi^{-1}(1-g(a)).$$

Πρόταση 3

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι παρατηρήσεις για το δείγμα. Έστω επίσης $\gamma\in[0,1)$. Εάν το δείγμα είναι αρκετά μικρό τότε,

$$\tilde{\mu}(x)=\begin{cases}\frac{2}{1-\gamma}F\left(\frac{x-\overline{X}}{s/\sqrt{n}}\right)-\frac{\gamma}{1-\gamma} & \alpha\nu\quad \overline{X}-F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)\le x\le\overline{X}\\[2ex] \frac{2}{1-\gamma}F\left(\frac{x-\overline{X}}{s/\sqrt{n}}\right)-\frac{\gamma}{1-\gamma} & \alpha\nu\quad \overline{X}\le x\le\overline{X}+F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)\end{cases}$$

είναι ένας ασαφής αριθμός η βάση του οποίου είναι ακριβώς το *1-γ* διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή *μ* και οι *α* – τομές αυτού του ασαφούς αριθμού είναι τα κλειστά διαστήματα:

$$\alpha\left(\tilde{\mu}\right)=\left[\overline{X}-t_{g(a)}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{g(a)}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Τα διαστήματα αυτά είναι ακριβώς τα *(1-α)(1-γ)* διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή *μ*, όπου

$$g(a)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\alpha+\frac{\gamma}{2},\ \left(g:[0,1]\to\left[\frac{\gamma}{2},0.5\right]\right)\quad \kappa\alpha\iota\quad t_{g(a)}=F^{-1}(1-g(a)).$$

Πρόταση 4

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι παρατηρήσεις για το δείγμα. Έστω επίσης $\gamma\in[0,1)$. Εάν το δείγμα είναι αρκετά μικρό τότε,

$$\tilde{\mu}(x)=\begin{cases} \dfrac{2-\gamma}{1-\gamma}-\dfrac{2}{1-\gamma}F\left(\dfrac{(n-1)s^2}{x}\right) & \alpha\nu \quad \dfrac{(n-1)s^2}{F^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\le x\le\dfrac{(n-1)s^2}{F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)} \\ -\dfrac{2-\gamma}{1-\gamma}-\dfrac{2}{1-\gamma}F\left(\dfrac{(n-1)s^2}{x}\right) & \alpha\nu \quad \dfrac{(n-1)s^2}{F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}\le x\le\dfrac{(n-1)s^2}{F^{-1}\left(\frac{2-\gamma}{2}\right)} \end{cases}$$

είναι ένας ασαφής αριθμός η βάση του οποίου είναι ακριβώς το *1-γ* διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά s^2 και οι *α* – τομές αυτού του ασαφούς αριθμού είναι τα κλειστά διαστήματα:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}\right)=\left[\frac{(n-1)s^2}{x^2{}_{g(a)}},\ \frac{(n-1)s^2}{x^2{}_{1-g(a)}}\right].$$

Τα διαστήματα αυτά είναι ακριβώς τα *(1-α)(1-γ)* διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διασπορά s^2, όπου

$$g(a)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\alpha+\frac{\gamma}{2},\ \left(g:[0,1]\to\left[\frac{\gamma}{2},0.5\right]\right)\quad \kappa\alpha\iota\quad x^2{}_{g(a)}=F^{-1}(1-g(a)).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Χρήση ασαφών εκτιμητών

4.1 Γιατί είναι εύχρηστοι οι ασαφείς εκτιμητές;

Οι ασαφείς εκτιμητές είναι ασαφείς αριθμοί. Όμως, **οι πράξεις μεταξύ ασαφών αριθμών δίνουν δυνατότητες που με τη στατιστική δεν υπάρχουν.** Γι' αυτό οι ασαφείς εκτιμητές είναι ιδιαίτερα εύχρηστοι.

Δηλαδή, αν μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ και μια άλλη μεταβλητή Y την $Y \sim X^2$, τότε το πηλίκο των μεταβλητών δεν γνωρίζουμε τι κατανομή ακολουθεί. Αν όμως έχουμε έναν ασαφή εκτιμητή της τυχαίας μεταβλητής X και έναν ασαφή εκτιμητή της τυχαίας μεταβλητής Y, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς τη μορφή του πηλίκου των ασαφών εκτιμητών των μεταβλητών X και Y.

Επίσης, αν έχουμε τον εκτιμητή του σ και τον εκτιμητή του μ δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή μεταβλητότητας δ μιας τυχαίας μεταβλητής ($\delta = \frac{\sigma}{\mu}$), με βάση τις στατιστικές μεθόδους. Αντίθετα, μπορούμε να υπολογίσουμε τον ασαφή εκτιμητή του συντελεστή μεταβλητότητας, αν έχουμε τον ασαφή εκτιμητή του σ και τον ασαφή εκτιμητή του μ.

Συνεπώς, είναι πλέον δυνατό να κάνουμε εύκολα πράξεις μεταξύ ασαφών εκτιμητών, σε αντίθεση με τις συναρτήσεις πιθανότητας.

Τέλος, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε γραφικά την εξής ιδιότητα:

Η διαφορά στο διάγραμμα ενός ασυμπτωτικού ασαφούς εκτιμητή $\tilde{\theta}$ από εκείνο ενός μη ασυμπτωτικού ασαφούς εκτιμητή $\tilde{\theta}_\gamma$, είναι ότι το διάγραμμα του μη ασυμπτωτικού ασαφούς εκτιμητή θα είναι χαμηλωμένο κατά γ μονάδες, όπου γ η στάθμη (επίπεδο) σημαντικότητας της εκτίμησης της παραμέτρου θ.

Στα επόμενα παραδείγματα, όπου χρειάζεται χρησιμοποιούμε το λογισμικό ασαφών αριθμών " **Fuzzy Arithmetic Operations 2.6** (Σφυρής Δημήτριος) ", προκειμένου να βρίσκουμε άμεσα τα αποτελέσματα σύνθετων υπολογισμών.

4.2 Παραδείγματα

1) **Αρχικά θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή *X*** και ένα δείγμα X_1 , X_2,..., X_n με $n = 37$, του οποίου η δειγματική μέση τιμή είναι $\overline{X} = 17.23$ (η μέση τιμή μ είναι άγνωστη) και η διασπορά $\sigma^2 = 4.76$.

Για επίπεδο σημαντικότητας $\gamma=0.1$, ένα *90%* διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της μ είναι το διάστημα

$$\left[\overline{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [16.64,\ 17.82].$$

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}1$ που σχηματίζεται για τη μ θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}1\right) = (16.64,\ 17.82)$$

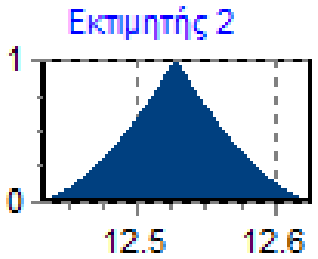
Ο παραπάνω ασαφής εκτιμητής δημιουργήθηκε από τις α-τομές του, με το διάστημα *[16.64, 17.82]* να είναι το περίβλημά του $^{0}\left(\tilde{\mu}1\right)$, το οποίο ισούται με το *90%* διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της μέσης τιμής από αυτό το δείγμα. Επομένως, σε αυτό το 90% διάστημα αντιστοιχεί ο μη ασυμπτωτικός ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}1$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Τώρα, θεωρούμε μια άλλη τυχαία μεταβλητή *Y* και το δείγμα Y_1, Y_2, ..., Y_n με $n=113$, του οποίου η δειγματική μέση τιμή είναι $\overline{Y} = 12.53$ (η μέση τιμή μ είναι άγνωστη) και η διασπορά $\sigma^2 = 0.38$.

Για επίπεδο σημαντικότητας $\gamma=0.1$, ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}2$ που σχηματίζεται για τη μ θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}2\right) = [12.43,\ 12.62].$$

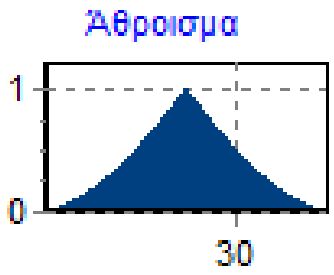
Το παραπάνω διάστημα είναι ένα *90%* διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της μ, στο οποίο αντιστοιχεί ο μη ασυμπτωτικός ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}2$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



❖ **Το άθροισμα των ασαφών εκτιμητών** $\tilde{\mu}1+\tilde{\mu}2$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}1+\tilde{\mu}2\right)=[29.08,\ 30.45]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Ενδεικτικά να αναφέρουμε για *α= 1* έχουμε *1 –* τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\mu}1+\tilde{\mu}2\right)=[29.76,\ 29.76]$$

Για *α= 0.5* έχουμε *1/2 –* τομές:

$$^{1/2}\left(\tilde{\mu}1+\tilde{\mu}2\right)=[29.51,\ 30.01]$$

Για *α= 0.05* έχουμε *0.05 –* τομές:

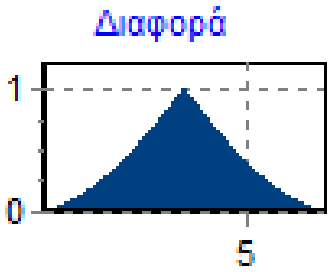
$$^{0.05}\left(\tilde{\mu}1+\tilde{\mu}2\right)=[29.15,\ 30.37].$$

❖ **Η διαφορά των ασαφών εκτιμητών** $\tilde{\mu}1-\tilde{\mu}2$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με

α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}1-\tilde{\mu}2\right)=[4.02,\ 5.39]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



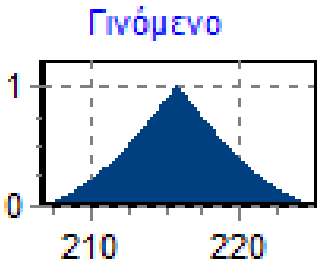
Για $\alpha = 1$ έχουμε $1-$ τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\mu}1-\tilde{\mu}2\right)=[4.70,\ 4.70]$$

❖ **Το γινόμενο των ασαφών εκτιμητών** $\tilde{\mu}1*\tilde{\mu}2$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}1*\tilde{\mu}2\right)=[206.92,\ 225.00]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Για $\alpha = 1$ έχουμε $1-$ τομές:

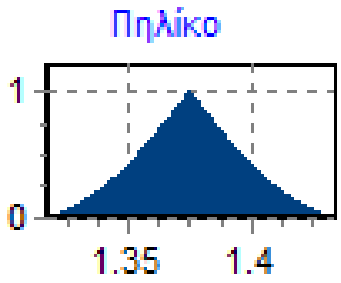
$$^{1}\left(\tilde{\mu}1*\tilde{\mu}2\right)=[215.91,\ 215.91]$$

❖ **Το πηλίκο των ασαφών εκτιμητών** $\tilde{\mu}1/\tilde{\mu}2$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με

α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}1/\tilde{\mu}2\right)=[1.32,\ 1.43]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα



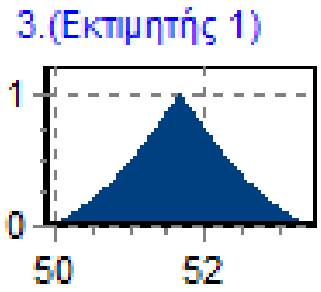
Για α= *1* έχουμε *1* – τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\mu}1/\tilde{\mu}2\right)=[1.38,\ 1.38]$$

❖ **Το γινόμενο ενός ασαφούς εκτιμητή, έστω του $\tilde{\mu}1$, με μια σταθερά *c*,** για παράδειγμα *c=3*, θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$$^{\alpha}\left(3*\tilde{\mu}1\right)=[49.93,\ 53.47]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα



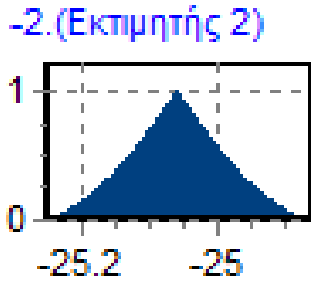
Για α= *1* έχουμε *1* – τομές:

$$^{1}\left(3*\tilde{\mu}1\right)=[51.70,\ 51.70].$$

❖ Παρόμοια, το γινόμενο του ασαφούς εκτιμητή $\tilde{\mu}2$ με το *-2*, θα είναι ο ασαφής αριθμός με *α* – τομές:

$$^{\alpha}\left(-2*\tilde{\mu}2\right)=\left[-24.87,\ -25.25\right]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Για *α= 1* έχουμε *1 –* τομές:

$$^{1}\left(-2*\tilde{\mu}2\right)=\left[-25.06,\ -25.06\right].$$

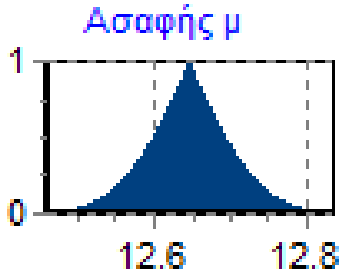
2) **Έστω μια τυχαία μεταβλητή *X*** και ένα δείγμα X_1 , X_2,..., X_n με *n = 70*, του οποίου η δειγματική μέση τιμή είναι $\overline{X}=12.65$ (η μέση τιμή *μ* είναι άγνωστη) και η διασπορά $\sigma^2 = 0.37$.

Η τυπική απόκλιση είναι *σ = 0.61*.

Για επίπεδο σημαντικότητας *γ=0.01, ο* ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}$ που σχηματίζεται για τη *μ* θα είναι ο ασαφής αριθμός με *α* – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}\right)=\left[12.46,\ 12.83\right]$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



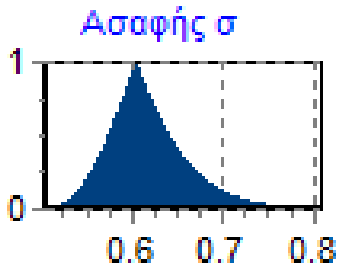
Για $\alpha = 1$ έχουμε $1-$ τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\mu}\right) = [12.65,\ 12.65]$$

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\sigma}$ που σχηματίζεται για την σ θα είναι ο ασαφής αριθμός με $\alpha-$ τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\sigma}\right) = [0.50,\ 0.81]$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



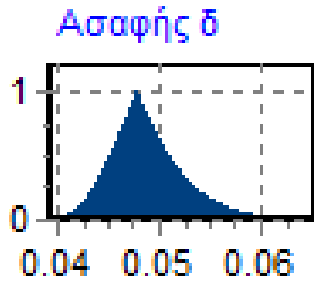
Για $\alpha = 1$ έχουμε $1-$ τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\sigma}\right) = [0.61,\ 0.61]$$

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\delta}$**,** που σχηματίζεται για τον συντελεστή μεταβλητότητας $\delta = \dfrac{\sigma}{\mu}$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με $\alpha-$ τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\delta}\right) = [0.04,\ 0.06]$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Για $\alpha = 1$ έχουμε $1-$ τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\delta}\right) = [0.05,\ 0.05]$$

3) **Έστω μια τυχαία μεταβλητή *Y*** και το δείγμα $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ με $n = 45$, του οποίου η δειγματική μέση τιμή είναι $\overline{Y} = 12.70$ (η μέση τιμή μ είναι άγνωστη) και η διασπορά $\sigma^2 = 0.47$.

Για επίπεδο σημαντικότητας $\gamma=0.1$, ο ασαφής μη ασυμπτωτικός εκτιμητής $\tilde{\mu}$ που σχηματίζεται για τη μ θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}\right) = [12.53,\ 12.87]$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Επίσης, ο ασυμπτωτικός ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}'$ που σχηματίζεται για τη μ θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\mu}'\right) = [12.36,\ 13.04]$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Παρατηρούμε ότι:

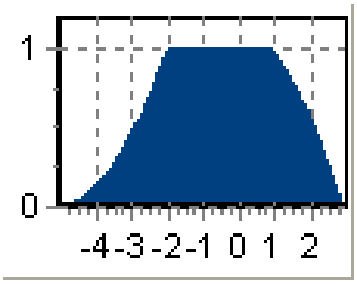
Στο διάγραμμα του ασυμπτωτικού εκτιμητή, σύμφωνα με το λογισμικό, για *x= 12.53* είναι *y= 0.1*. Επίσης, για *x= 12.87* είναι πάλι *y= 0.1*.

Αυτό σημαίνει ότι, το διάγραμμα του μη ασαφούς ασυμπτωτικού εκτιμητή είναι χαμηλωμένο κατά *0.1* μονάδες από το διάγραμμα του ασαφούς ασυμπτωτικού εκτιμητή, όπου *γ= 0.1* το επίπεδο σημαντικότητας της εκτίμησης της παραμέτρου *μ*.

4) **Έστω ένας τραπεζοειδής ασαφής εκτιμητής** $\tilde{\theta}$ που σχηματίζεται για μια παράμετρο θ με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\tilde{\Theta}(x)=\begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad x\le -5 \\ (1/10)*x*x+(31/30)*x+8/3 & \alpha\nu \quad -5\le x\le -2 \\ 1 & \alpha\nu \quad -2\le x\le 1 \\ -(1/10)*x*x-(1/10)*x+6/5 & \alpha\nu \quad 1\le x\le 3 \\ 0 & \alpha\nu \quad x\ge 3 \end{cases}$$

Με τη βοήθεια του λογισμικού, έχουμε το παρακάτω διάγραμμα για τον εκτιμητή $\tilde{\theta}$:



Οι *α* – τομές είναι:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\theta}\right)=[-5.00,\ 3.00]$$

Για *α= 1* έχουμε *1* – τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\theta}\right)=[-2.00,\ 1.00]$$

Στο συγκεκριμένο διάστημα *[-2.00, 1.00]* ο βαθμός συμμετοχής του *x* είναι:

$$\tilde{\Theta}(x)=1.$$

Για *x= -3* ο βαθμός συμμετοχής είναι:

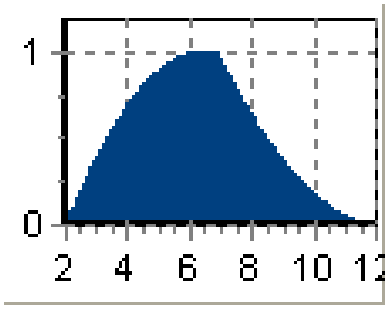
$\tilde{\Theta}(-3) = 0.47$.

Βέβαια για τον ίδιο βαθμό συμμετοχής *(0.47)* έχουμε και *x= 2.25*

Θεωρούμε επίσης, ένα δεύτερο τραπεζοειδή ασαφή εκτιμητή $\tilde{\kappa}$ που σχηματίζεται για μια παράμετρο *κ* με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\tilde{K}(x) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad x \le 2 \\ (-1/20)*x*x + (13/20)*x - 11/10 & \alpha\nu \quad 2 \le x \le 6 \\ 1 & \alpha\nu \quad 6 \le x \le 7 \\ (1/30)*x*x - (5/6)*x + 26/5 & \alpha\nu \quad 7 \le x \le 12 \\ 0 & \alpha\nu \quad x \ge 12 \end{cases}$$

σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα:



Οι *α* – τομές είναι:

$${}^{\alpha}\left(\tilde{\kappa}\right) = [2.00,\ 12.00]$$

Για *α= 1* έχουμε *1 –* τομές:

$${}^{1}\left(\tilde{\kappa}\right) = [6.00,\ 7.00]$$

Για βαθμό συμμετοχής $\tilde{K}(x) = 0.50$ έχουμε *x= 3.30* και *x= 8.59*, ενώ οι *0.50* – τομές είναι:

$${}^{0.50}\left(\tilde{\kappa}\right) = [3.30,\ 8.59].$$

Παρατηρούμε ότι στο *[3.30, 8.59]* ο βαθμός συμμετοχής $\tilde{K}(x) \ge 0.50$.

- **Το άθροισμα των ασαφών εκτιμητών** $\tilde{\theta}+\tilde{\kappa}$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\theta}+\tilde{\kappa}\right)=\left[-3.00,\,15.00\right]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

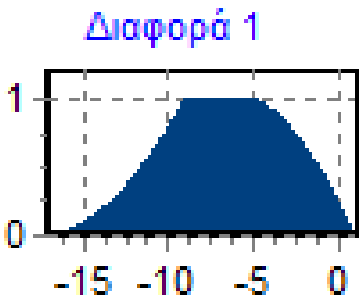
Ενδεικτικά αναφέρουμε, για βαθμό συμμετοχής $\left(\tilde{\Theta}+\tilde{\mathrm{K}}\right)(x)=0.10$ έχουμε *x= -1.96* και *x= 13.60* ενώ οι *0.10* – τομές είναι:.

$$^{0.10}\left(\tilde{\theta}+\tilde{\kappa}\right)=\left[-1.96,\,13.60\right].$$

- **Η διαφορά των ασαφών εκτιμητών** $\tilde{\theta}-\tilde{\kappa}$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\theta}-\tilde{\kappa}\right)=\left[-17.00,\,1.00\right]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Για *α= 1* έχουμε *1* – τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\theta}-\tilde{\kappa}\right)=[-9.00,\ -5.00]$$

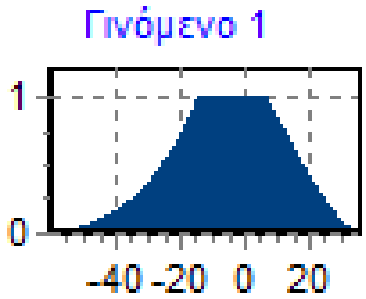
Στο διάστημα *[-9.00, -5.00]* ο βαθμός συμμετοχής του x είναι:

$$\left(\tilde{\Theta}-\tilde{\mathrm{K}}\right)(x)=1.$$

- **Το γινόμενο των ασαφών εκτιμητών** $\tilde{\theta}*\tilde{\kappa}$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με *α* – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\theta}*\tilde{\kappa}\right)=[-60.00,\ 36.00]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



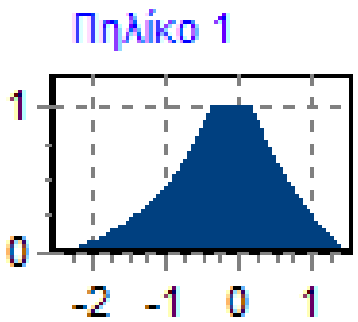
Για *α= 1* έχουμε *1* – τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\theta}*\tilde{\kappa}\right)=[-14.00,\ 7.00]$$

- **Το πηλίκο των ασαφών εκτιμητών** $\tilde{\theta}/\tilde{\kappa}$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με *α* – τομές:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\theta}/\tilde{\kappa}\right)=[-2.50,\ 1.50]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα



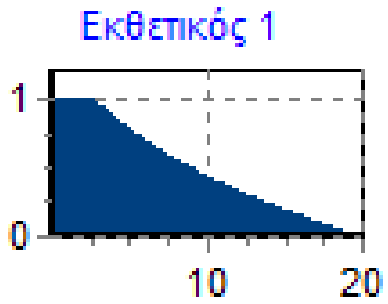
Για $\alpha = 1$ έχουμε $1-$ τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\theta}/\tilde{\kappa}\right) = [-0.33,\ 0.17]$$

- **Ο εκθετικός ασαφής εκτιμητής** $Exp\left(\tilde{\theta}\right)$**,** θα είναι ο ασαφής αριθμός με $\alpha-$ τομές:

$$^{\alpha}\left(Exp\left(\tilde{\theta}\right)\right) = [0.01,\ 20.09]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

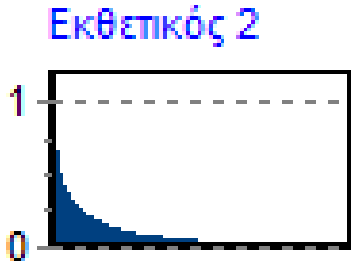


Για $\alpha = 1$ έχουμε $1-$ τομές:

$$^{1}\left(Exp\left(\tilde{\theta}\right)\right) = [0.14,\ 2.72]$$

Παρόμοια για τον εκθετικό ασαφή εκτιμητής $Exp\left(\tilde{\kappa}\right)$ έχουμε:

$$^{\alpha}\left(Exp\left(\tilde{\kappa}\right)\right) = [7.39,\ 16275479]$$



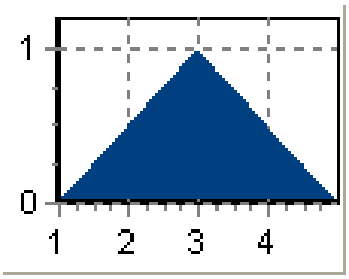
Για $\alpha = 1$ έχουμε $1-$ τομές:

$$^{1}\left(Exp\left(\tilde{\kappa}\right)\right) = [403.43,\ 1096.63]$$

5) **Θεωρούμε ένα τριγωνικό ασαφή εκτιμητή** $\tilde{\lambda}$ που σχηματίζεται για μια παράμετρο λ με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\tilde{\Lambda}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 1 \\ (1/2)*\mathrm{x} - 1/2 & , \quad x \in (1,3) \\ (-1/2)*\mathrm{x} + 5/2 & , \quad x \in (3,5) \\ 0 & , \quad x \ge 5 \end{cases}$$

Για τον εκτιμητή $\tilde{\lambda}$, έχουμε το παρακάτω διάγραμμα:



Οι α – τομές είναι:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\lambda}\right) = [1.00,\ 5.00]$$

Για $\alpha = 1$ έχουμε 1 – τομές:

$$^{1}\left(\tilde{\lambda}\right) = [3.00,\ 3.00]$$

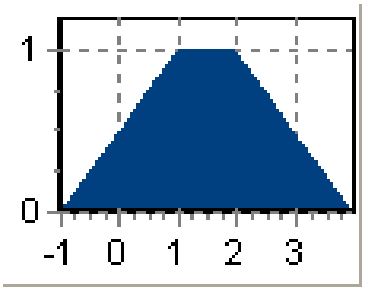
Οι 0.5 – τομές είναι:

$$^{0.5}\left(\tilde{\lambda}\right) = [2.00,\ 4.00]$$

Επίσης, θεωρούμε ένα τραπεζοειδή ασαφή εκτιμητή $\tilde{\nu}$ που σχηματίζεται για μια παράμετρο ν με συνάρτηση συμμετοχής:

$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu & x \le -1 \\ (1/2)*x + 1/2 & \alpha\nu & -1 \le x \le 1 \\ 1 & \alpha\nu & 1 \le x \le 2 \\ -(1/2)*x + 4/2 & \alpha\nu & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \alpha\nu & x \ge 4 \end{cases}$$

οπότε έχουμε το παρακάτω διάγραμμα:



Οι α – τομές είναι:

$${}^{\alpha}\left(\tilde{\nu}\right) = [-1.00,\ 4.00]$$

Για $\alpha = 1$ έχουμε 1 – τομές:

$${}^{1}\left(\tilde{\nu}\right) = [1.00,\ 2.00]$$

Οι 0.5 – τομές είναι:

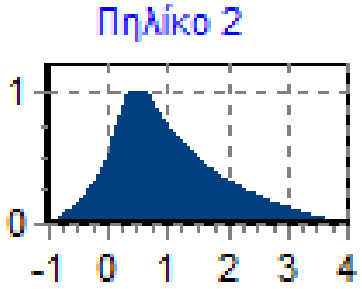
$${}^{0.5}\left(\tilde{\nu}\right) = [0.00,\ 3.00]$$

Το πηλίκο των ασαφών εκτιμητών $\tilde{\lambda}/\tilde{\nu}$ δεν ορίζεται, γιατί οι α – τομές του ασαφούς εκτιμητή $\tilde{\nu}$ περιέχουν την τιμή 0.

Το πηλίκο των ασαφών εκτιμητών $\tilde{\nu}/\tilde{\lambda}$, θα είναι ο ασαφής αριθμός με α – τομές:

$${}^{\alpha}\left(\tilde{\nu}/\tilde{\lambda}\right) = [-1.00,\ 4.00]$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Οι *1* – τομές είναι:

$$^{1}\left(\tilde{\nu}/\tilde{\lambda}\right)=[0.33,\ 0.67]$$

Τέλος, *οι 0.5* – τομές *είναι*:

$$^{0.5}\left(\tilde{\nu}/\tilde{\lambda}\right)=[0.00,\ 1.50].$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. Εκτίμηση παραμέτρων σε οποιαδήποτε κατανομή

5.1 Εισαγωγή

Η στατιστική συνδέεται με τη θεωρία πιθανοτήτων με τους αμερόληπτους εκτιμητές των παραμέτρων μ και σ^2 της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X.

Όμως, **γιατί είναι σπουδαίο να προσεγγίσουμε τις παραμέτρους μ και σ^2;**

Με την εκτίμηση των παραμέτρων αυτών, εφ' όσον γνωρίζουμε τη γενική μορφή της κατανομής, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους της και συνεπώς την ακριβή μορφή της. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες που επιθυμούμε.

Τέτοιες προσεγγίσεις είναι πολύ χρήσιμες. Παράδειγμα, στη λογαριθμοκανονική κατανομή, η συνάρτηση πιθανότητας είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη σε τομείς όπου επιβάλλεται η μεταβλητή X να είναι θετική. Ένας τέτοιος τομέας είναι της μηχανικής.

5.2 Εκτίμηση σε Poisson και σε εκθετική κατανομή

- **Η κατανομή Poisson είναι μία από τις πιο βασικές κατανομές της θεωρίας πιθανοτήτων και της στατιστικής.** Εφαρμόζεται όταν έχουμε μία σειρά τυχαίων ενδεχομένων τα οποία γίνονται με την πάροδο του χρόνου έτσι ώστε

i. η πιθανότητα να συμβεί ένα ενδεχόμενο σε ένα μικρό χρονικό διάστημα είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος,

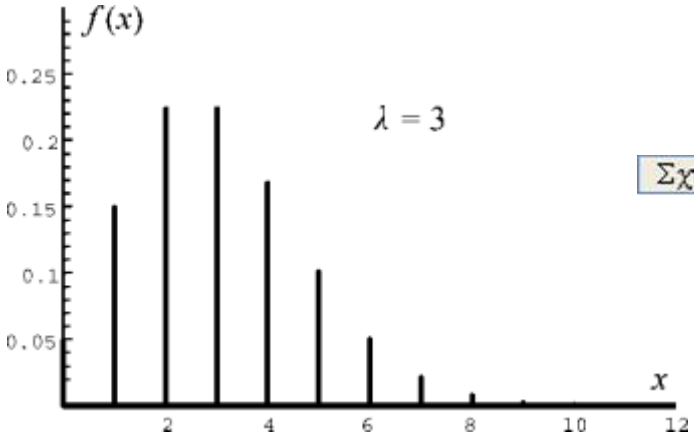
ii. η πιθανότητα να συμβούν δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα να είναι αμελητέα και

iii. τα ενδεχόμενα που πραγματοποιούνται σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα να είναι στατιστικώς ανεξάρτητα.

Έστω η τυχαία μεταβλητή X που λαμβάνει τιμές $x = 0, 1, 2, \ldots$ και έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο λ (σχήμα *1*).

Η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

$$f(x) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots \text{ με παράμετρο } \lambda>0.$$



Σχήμα 1

Συμβολικά: *X~Poisson(λ)*.

Η παράμετρος η οποία είναι άγνωστη ή δεν είναι ακριβώς καθορισμένη στην κατανομή Poisson, είναι το λ. Σε κάθε περίπτωση η τιμή της είναι αβέβαιη. Έστω ο ασαφής αριθμός $\tilde{\lambda}$, είναι ο εκτιμητής της παραμέτρου λ. Τότε η ασαφής συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

$$\tilde{f}(x)[a] = \left\{ e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!},\ \ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha],\ x = 0,1,2,... \right\},\ 0 \le \alpha \le 1$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι:

$$E(X) = \mu = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda \qquad \text{και}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Η ασαφής μέση τιμή $\tilde{\mu}$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{\mu}[a] = \{\sum_{x=0}^{\infty} x f(\lambda),\ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha]\} = \{\lambda,\ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha]\},\ 0 \le \alpha \le 1$$

Άρα έχουμε $\tilde{\mu} = \tilde{\lambda}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Η ασαφής διακύμανση $(\tilde{\sigma})^2$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$(\tilde{\sigma})^2[a] = \{(E(X^2) - E(X)^2),\ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha]\ , \mu = \lambda\} =$$

$$\{(\lambda^2 + \lambda - \lambda^2),\ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha]\} = \{\lambda,\ \ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha]\},\ 0 \le \alpha \le 1$$

Άρα έχουμε $(\tilde{\sigma})^2 = \tilde{\lambda}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Τελικά

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\mu} \quad \text{και}$$

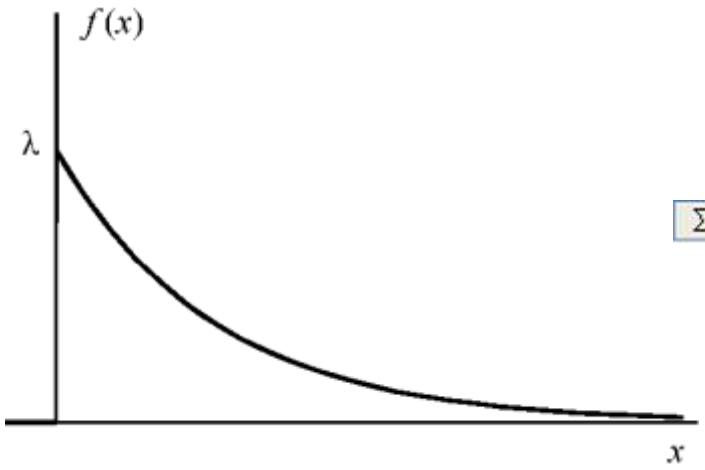
$\tilde{\lambda} = (\tilde{\sigma})^2$.

❖ **Η εκθετική κατανομή εμφανίζεται συνήθως** σε περιπτώσεις όπου μελετάμε το χρόνο αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση ενός γεγονότος. Έστω η τυχαία μεταβλητή *X* που λαμβάνει τιμές *x = 0, 1, 2, …* και έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο *λ* (σχήμα *2*).

Η συνάρτηση πιθανότητας της *X* είναι:

$f(x) = P(X = x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x = 0,1,2,...$ με παράμετρο $\lambda>0$.

Η $f(x)=0$, αν $x<0$.



Σχήμα 2

Συμβολικά: $X \sim Exp(\lambda)$.

Η παράμετρος η οποία είναι άγνωστη ή δεν είναι ακριβώς καθορισμένη στην εκθετική κατανομή, είναι το *λ*. Σε κάθε περίπτωση η τιμή της είναι αβέβαιη. Έστω ο ασαφής αριθμός $\tilde{\lambda}$, είναι ο εκτιμητής της παραμέτρου *λ*. Τότε η ασαφής συνάρτηση πιθανότητας της *X* είναι:

$\tilde{f}(x)[a] = \{\lambda e^{-\lambda x},\ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha],\ x = 0,1,2,...\},\ 0 \le \alpha \le 1$

Όμως, γνωρίζουμε ότι:

$$E(X) = \mu = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{και}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Η ασαφής μέση τιμή $\tilde{\mu}$ με τη βοήθεια των *α* – τομών είναι:

$$\tilde{\mu}[a] = \left\{ \sum_{x=0}^{\infty} x f(\lambda),\ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha] \right\} = \left\{ \frac{1}{\lambda},\ \ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha] \right\},\ 0 \le \alpha \le 1$$

Άρα έχουμε $\tilde{\mu} = \frac{1}{\tilde{\lambda}}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Η ασαφής διακύμανση $(\tilde{\sigma})^2$ με τη βοήθεια των α – τομών είναι:

$$(\tilde{\sigma})^2[a] = \left\{ (E(X^2) - E(X)^2),\ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha]\ , \mu = \frac{1}{\lambda} \right\} =$$

$$\left\{ \frac{1}{\lambda^2},\ \ \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha] \right\},\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Άρα έχουμε $(\tilde{\sigma})^2 = \frac{1}{(\tilde{\lambda})^2}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Συνεπώς έχουμε:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{1}{\tilde{\mu}}$$

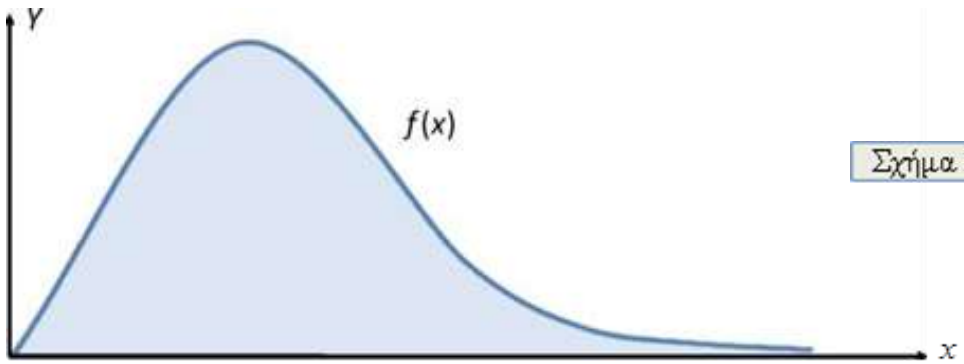
$$(\tilde{\sigma})^2 = \frac{1}{(\tilde{\lambda})^2} \Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{1}{\tilde{\sigma}}$$

5.3 Εκτίμηση σε λογαριθμοκανονική κατανομή

Η κατανομή αυτή εμφανίζεται πολύ συχνά στην στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση. Έστω μια τυχαία μεταβλητή *X*, που έχει τη λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους ζ και λ (σχήμα *3*). Η συνάρτηση πιθανότητας της *X* είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta x}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2}$$

Συμβολικά: $X \sim \Lambda(\lambda, \zeta)$.



Σχήμα 3

Οι παράμετροι οι οποίοι είναι άγνωστοι ή δεν είναι ακριβώς καθορισμένοι στην λογαριθμοκανονική κατανομή, είναι τα ζ και λ. Οι τιμές τους είναι αβέβαιες. Έστω $\Lambda(\tilde{\lambda}, \tilde{\zeta})$ με $\tilde{\lambda}$ και $\tilde{\zeta}$ ασαφείς αριθμούς, οι οποίοι είναι ασαφείς εκτιμητές των παραμέτρων λ και ζ.

Η ασαφής συνάρτηση πιθανότητας της X είναι:

$$\tilde{f}(x) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta x}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2}, \quad \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha],\ \zeta \in \tilde{\zeta}[\alpha] \right\},\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$E(\mathrm{X}) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = e^{\lambda + \frac{1}{2}\zeta^2} \qquad \text{και}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu^2 \left(e^{\zeta^2} - 1 \right).$$

Η ασαφής μέση τιμή $\tilde{\mu}$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha],\ \zeta \in \tilde{\zeta}[\alpha] \right\} =$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\zeta x}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\zeta}\right)^2} dx, \quad \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha],\ \zeta \in \tilde{\zeta}[\alpha] \right\} =$$

$$\left\{ e^{\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}\tilde{\zeta}^2}, \quad \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha],\ \zeta \in \tilde{\zeta}[\alpha] \right\},\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Συνεπώς έχουμε $\tilde{\mu} = e^{\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}\tilde{\zeta}^2}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Η ασαφής διακύμανση $(\tilde{\sigma})^2$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$(\tilde{\sigma})^2[\alpha]=\left\{(E(X^2)-E(X)^2),\ \ \lambda\in\tilde{\lambda}[\alpha],\ \zeta\in\tilde{\zeta}[\alpha],\ \mu=e^{\lambda+\frac{1}{2}\zeta^2}\right\}=$$

$$\left\{\mu^2\left(e^{\zeta^2}-1\right),\ \ \lambda\in\tilde{\lambda}[\alpha],\ \zeta\in\tilde{\zeta}[\alpha]\right\},\ 0\le\alpha\le 1.$$

Άρα $(\tilde{\sigma})^2=(\tilde{\mu})^2\left(e^{\tilde{\zeta}^2}-1\right)$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Έχουμε τις σχέσεις:

$$e^{\tilde{\lambda}+\frac{1}{2}\tilde{\zeta}^2}=\tilde{\mu}\Rightarrow\lambda+\frac{1}{2}\zeta^2=\ln\tilde{\mu}\qquad(1)$$

$$(\tilde{\mu})^2\left(e^{\tilde{\zeta}^2}-1\right)=(\tilde{\sigma})^2\Rightarrow e^{\tilde{\zeta}^2}-1=\frac{(\tilde{\sigma})^2}{(\tilde{\mu})^2}\qquad(2)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$e^{\zeta^2}=\frac{(\tilde{\sigma})^2+(\tilde{\mu})^2}{(\tilde{\mu})^2}\Rightarrow(\tilde{\zeta})^2=\ln\left(\frac{(\tilde{\sigma})^2+(\tilde{\mu})^2}{(\tilde{\mu})^2}\right)\Rightarrow$$

$$\tilde{\zeta}=\sqrt{\ln\left(\frac{(\tilde{\sigma})^2+(\tilde{\mu})^2}{(\tilde{\mu})^2}\right)}.$$

Τέλος από τη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$\tilde{\lambda}=\ln\tilde{\mu}-\frac{1}{2}\ln\frac{(\tilde{\sigma})^2+(\tilde{\mu})^2}{(\tilde{\mu})^2}\Rightarrow\tilde{\lambda}=\ln\left(\frac{\tilde{\mu}}{\sqrt{\frac{(\tilde{\sigma})^2+(\tilde{\mu})^2}{(\tilde{\mu})^2}}}\right)=\ln\left(\frac{(\tilde{\mu})^2}{\sqrt{(\tilde{\sigma})^2+(\tilde{\mu})^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\tilde{\lambda}=\ln\left(\frac{(\tilde{\mu})^2}{\sqrt{(\tilde{\sigma})^2+(\tilde{\mu})^2}}\right).$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ροπών προσεγγίσαμε τις παραμέτρους λ και ζ με τα $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\zeta}$ που είναι ασαφείς εκτιμητές των λ και ζ αντίστοιχα.

5.4 Εκτίμηση σε ομοιόμορφη συνεχής κατανομή

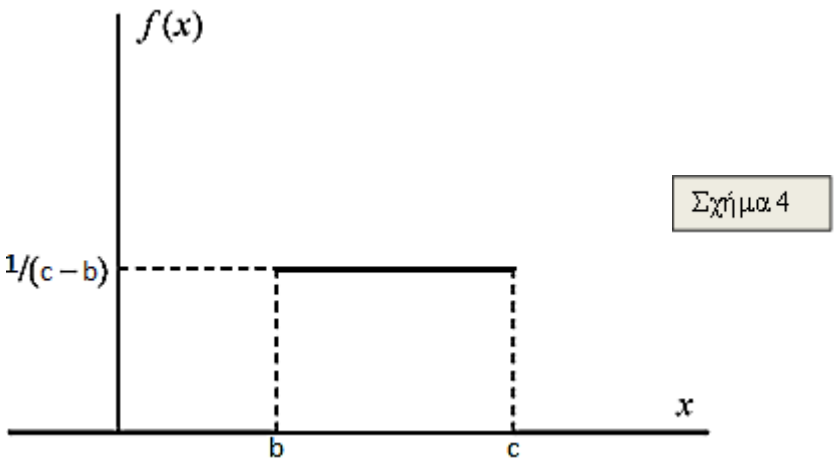
Η απλούστερη συνεχής κατανομή πιθανότητας είναι η ομοιόμορφη κατανομή. Εκχωρεί ίσες (ομοιόμορφες) πιθανότητες στα στοιχειώδη δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος, με συνεχή (μη απαριθμητό) δειγματικό χώρο *Ω*.

Θεωρούμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή *X* ορισμένη στον *Ω* με πεδίο τιμών το διάστημα *[b, c]*, όπου *b* < *c* πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση πιθανότητας της *X* είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c-b} & \alpha\nu \quad b \le x \le c \\ 0 & \alpha\nu \quad x < b \quad \acute{\eta} \quad x > c \end{cases}$$

με παραμέτρους *b* και *c*. (σχήμα *4*)

Συμβολικά: *X~ U(b, c).*



Στην ομοιόμορφη κατανομή, οι παράμετροι οι οποίοι είναι άγνωστοι ή δεν είναι ακριβώς καθορισμένοι, είναι τα *b* και *c*. Οι τιμές τους είναι αβέβαιες. Έστω $U(\tilde{b}, \tilde{c})$ με $\tilde{b}$ και $\tilde{c}$ ασαφείς αριθμούς, οι οποίοι είναι ασαφείς εκτιμητές των παραμέτρων *b* και *c*.

Η ασαφής συνάρτηση πιθανότητας της *X* είναι:

$$\tilde{f}(x)=\left\{\begin{cases}\dfrac{1}{c-b} & , \quad b\le x\le c\\ 0 & , \quad x<b \quad ή \quad x>c\end{cases}\right\},\ c\in\tilde{c}[\alpha],\ b\in\tilde{b}[\alpha],\ b<c\Bigg\},\ 0\le\alpha\le 1.$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$E(X)=\mu=\int_b^c x\frac{1}{c-b}dx=\frac{b+c}{2} \qquad \text{και}$$

$$Var(X)=\sigma^2=E(X^2)-E(X)^2=\frac{(b-c)^2}{12}$$

Η ασαφής μέση τιμή $\tilde{\mu}$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{\mu}[\alpha]=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,\ \ b\in\tilde{b}[\alpha],\ c\in\tilde{c}[\alpha]\right\}=$$

$$\left\{\int_b^c \frac{x}{c-b}dx,\ \ b\in\tilde{b}[\alpha],\ c\in\tilde{c}[\alpha]\right\}=$$

$$\left\{\frac{b+c}{2},\ \ b\in\tilde{b}[\alpha],\ c\in\tilde{c}[\alpha]\right\},\ 0\le\alpha\le 1.$$

Συνεπώς έχουμε $\tilde{\mu}=\dfrac{\tilde{b}+\tilde{c}}{2}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Η ασαφής διακύμανση $(\tilde{\sigma})^2$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$(\tilde{\sigma})^2[\alpha]=\left\{(E(X^2)-E(X)^2),\ b\in\tilde{b}[\alpha],\ c\in\tilde{c}[\alpha],\ \mu=\frac{b+c}{2}\right\}=$$

$$\left\{\frac{(b-c)^2}{12},\ \ b\in\tilde{b}[\alpha],\ c\in\tilde{c}[\alpha]\right\},\ 0\le\alpha\le 1.$$

Άρα $(\tilde{\sigma})^2=\dfrac{(\tilde{b}-\tilde{c})^2}{12}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Τελικά έχουμε:

$$\frac{\tilde{b}+\tilde{c}}{2}=\tilde{\mu}\Rightarrow\tilde{b}=2\tilde{\mu}-\tilde{c} \qquad (1)$$

$$\frac{\left(\tilde{b}-\tilde{c}\right)^2}{12}=(\tilde{\sigma})^2 \qquad (2)$$

Από τη σχέση (2) λόγω της (1), προκύπτει:

$$\frac{(2\tilde{\mu}-\tilde{c}-\tilde{c})^2}{12}=(\tilde{\sigma})^2 \Rightarrow \tilde{c}=\tilde{\mu}-\sqrt{3}(\tilde{\sigma})^2$$

Επίσης, από την (1) έχουμε:

$$\tilde{b}=2\tilde{\mu}-(\tilde{\mu}-\sqrt{3}(\tilde{\sigma})^2) \Rightarrow \tilde{b}=\tilde{\mu}+\sqrt{3}(\tilde{\sigma})^2$$

5.5 Εκτίμηση σε διωνυμική και γεωμετρική κατανομή

Έστω ότι εκτελούμε *n* όμοια και ανεξάρτητα μεταξύ τους πειράματα (π.χ. *n* ρίψεις ενός νομίσματος). Το αποτέλεσμα κάθε ενός από αυτά τα πειράματα μπορεί να είναι είτε *1*: επιτυχία, είτε *0*: αποτυχία, με πιθανότητες *p* και $q = 1-p$ αντίστοιχα.

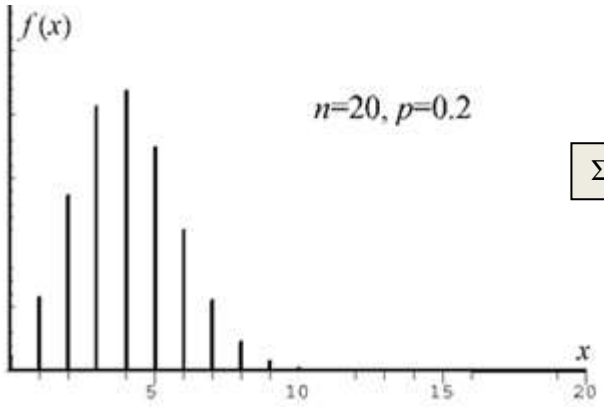
❖ Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή *X* που εκφράζει το πλήθος των επιτυχιών σε αυτά τα *n* πειράματα. Τότε αυτή θα ακολουθεί την **διωνυμική κατανομή με παραμέτρους *n, p*** (σχήμα *5*).

Η συνάρτηση πιθανότητας της *X* είναι:

$$f(x)=P(X=x)=\binom{n}{p}p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,2,\ldots,n$$

$$\mu\varepsilon\ \pi\alpha\rho\alpha\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\upsilon\varsigma\ \ n>0,\ p\in(0,1).$$

Συμβολικά: $X\sim B(n, p)$.



Σχήμα 5

Η παράμετρος η οποία είναι άγνωστη ή δεν είναι ακριβώς καθορισμένη στην διωνυμική κατανομή είναι η πιθανότητα επιτυχίας *p*. Η τιμή της είναι αβέβαιη. Έστω

$B(n,\ \tilde{p})$ με $\tilde{p}$ ασαφής αριθμός, ο οποίος είναι ασαφής εκτιμητής της παραμέτρου *p*.

Η ασαφής συνάρτηση πιθανότητας της *X* είναι:

$$\tilde{f}(x)[a] = \left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x}, \quad p \in \tilde{p}[a],\ n > 0, \\ x = 0,1,2,\ldots,n \end{array} \right\}, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$E(X) = \mu = \sum_{x=0}^{n} x f(x) = np \qquad \text{και}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = np(1-p)$$

Η ασαφής μέση τιμή $\tilde{\mu}$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \sum_{x=0}^{n} x f(x), \quad p \in \tilde{p}[a],\ n > 0, x = 0,1,2,\ldots,n \right\} =$$

$$\left\{ \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x}, \quad p \in \tilde{p}[a],\ n > 0 \right\} =$$

$$\left\{ np, \quad p \in \tilde{p}[a],\ n > 0 \right\},\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Συνεπώς έχουμε $\tilde{\mu} = n\,\tilde{p}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Η ασαφής διακύμανση $(\tilde{\sigma})^2$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$(\tilde{\sigma})^2[\alpha] = \left\{ \left(E(X^2) - E(X)^2\right), \quad p \in \tilde{p}[a],\ \mu = n\,p,\ n > 0, x = 0,1,2,\ldots,n \right\} =$$

$$\left\{ np(1-p), \quad p \in \tilde{p}[a] \right\},\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Άρα $(\tilde{\sigma})^2 = n\,\tilde{p}\left(1 - \tilde{p}\right)$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Επομένως έχουμε:

$$\tilde{\mu} = n\,\tilde{p} \qquad (1)$$

$$(\tilde{\sigma})^2 = n\,\tilde{p}\left(1 - \tilde{p}\right) \qquad (2)$$

Από τη σχέση (2) λόγω της (1), βρίσκουμε:

$$\tilde{\mu}\left(1-\tilde{p}\right)=(\tilde{\sigma})^2 \Rightarrow \hat{p}=\frac{\tilde{\mu}-(\tilde{\sigma})^2}{\tilde{\mu}}.$$

Για *n=1* **η κατανομή *B(1, p)* είναι γνωστή και ως κατανομή Bernoulli**. Αν $X \sim B(1,p)$ τότε $X \in \{0,1\}$ και

$P(X=0) = 1-p$, $P(X=1)= p$ ενώ

$E(X) = p$

$Var(X) = p(1-p)$.

Επομένως, αν $\tilde{\mu}$ η ασαφής μέση τιμή, $(\tilde{\sigma})^2$ η ασαφής διακύμανση και $\tilde{p}$ ο ασαφής εκτιμητής της παραμέτρου *p*, έχουμε:

$\tilde{p}=\tilde{\mu}$ και

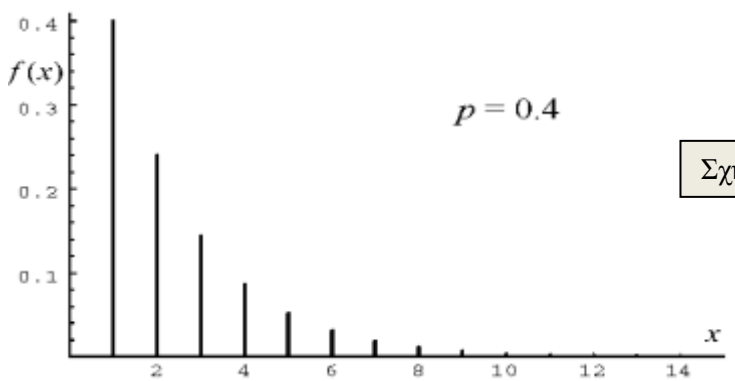
$$\tilde{p}=\frac{(\tilde{\sigma})^2}{1-\tilde{\mu}}$$

❖ Αν *X* η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των δοκιμών μέχρι και την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας, τότε η *X* ακολουθεί την **γεωμετρική κατανομή με παράμετρο *p*** (σχήμα *6*).

Η συνάρτηση πιθανότητας της *X* είναι:

$f(x)=(1-p)^{x-1}p, \quad x=1,2,\ldots \quad \mu\varepsilon\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\mu\varepsilon\tau\rho o$ p

Συμβολικά: $X \sim Ge(p)$.



Σχήμα 6

Στην γεωμετρική κατανομή, η παράμετρος η οποία είναι άγνωστη ή δεν είναι ακριβώς καθορισμένη, είναι το *p*. Η τιμή της είναι αβέβαια. Έστω $Ge\left(\tilde{p}\right)$ με $\tilde{p}$ ασαφής

αριθμός, ο οποίος είναι ασαφής εκτιμητής της παραμέτρου *p*.

Η ασαφής συνάρτηση πιθανότητας της *X* είναι:

$$\tilde{f}(x)[a] = \left\{ (1-p)^{x-1} p, \quad p \in \tilde{p}[a],\ x = 1, 2, \ldots \right\}, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$E(X) = \mu = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \frac{1}{p} \qquad \text{και}$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Η ασαφής μέση τιμή $\tilde{\mu}$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \sum_{x=1}^{\infty} x f(x), \quad p \in \tilde{p}[a],\ x = 1, 2, \ldots \right\} =$$

$$\left\{ \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} p, \quad p \in \tilde{p}[a] \right\} =$$

$$\left\{ \frac{1}{p}, \quad p \in \tilde{p}[a] \right\}, 0 \le \alpha \le 1.$$

Συνεπώς έχουμε $\tilde{\mu} = \dfrac{1}{\tilde{p}}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Η ασαφής διακύμανση $(\tilde{\sigma})^2$ με τη βοήθεια των α – τομών ορίζεται ως εξής:

$$(\tilde{\sigma})^2[\alpha] = \left\{ (E(X^2) - E(X)^2), \quad p \in \tilde{p}[a],\ \mu = \frac{1}{p}, x = 1, 2, \ldots \right\} =$$

$$\left\{ \frac{1-p}{p^2}, \quad p \in \tilde{p}[a] \right\}, 0 \le \alpha \le 1.$$

Άρα $(\tilde{\sigma})^2 = \dfrac{1-\tilde{p}}{(\tilde{p})^2}$, δηλαδή η ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης.

Τελικά έχουμε:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\tilde{p}} \Rightarrow \tilde{p} = \frac{1}{\tilde{\mu}}$$

$$(\tilde{\sigma})^2 = \frac{1-\tilde{p}}{(\tilde{p})^2} \Rightarrow \frac{1}{(\tilde{p})^2} - \frac{1}{\tilde{p}} = (\tilde{\sigma})^2 \Rightarrow \frac{1}{(\tilde{p})^2} - \tilde{\mu} = (\tilde{\sigma})^2 \Rightarrow \tilde{p} = \sqrt{\frac{1}{(\tilde{\sigma})^2 + \tilde{\mu}}} \ .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. Εφαρμογές ασαφών εκτιμητών σε συστήματα ουρών αναμονής

6.1 Εισαγωγή στα συστήματα ουρών αναμονής

Οι ουρές αναμονής δεν είναι τίποτα άλλο από τις συνηθισμένες ουρές που συναντούμε καθημερινά στη ζωή μας:

- ✓ Πελάτες στο ταμείο ενός καταστήματος ή μιας τράπεζας.
- ✓ Ασθενείς για εισαγωγή σε νοσοκομείο.
- ✓ Αυτοκίνητα που περιμένουν να μπουν σε αυτοκινητόδρομο ταχείας κυκλοφορίας.
- ✓ Φοιτητές του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας στο εστιατόριο.
- ✓ Κλήσεις στο *11888* για πληροφορίες καταλόγου του ΟΤΕ, κλπ.

Η Θεωρία Ουρών που μελετάει τέτοιου είδους ουρές αναπτύχθηκε στις αρχές του *20ου* αιώνα. Ο Erlang – Δανός μηχανικός, χρησιμοποίησε τα εργαλεία της θεωρίας αυτής για να μελετήσει τον μεταβαλλόμενο αριθμό κλήσεων σε ένα τηλεφωνικό δίκτυο και τις αντίστοιχες καθυστερήσεις που προκαλούνται.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει μια ουρά όταν οι "πελάτες" εμφανίζονται με τυχαίο τρόπο, οπότε ακολουθούν μια τυχαία κατανομή. Με τον γενικό όρο "πελάτες" εννοούμε τα πρόσωπα, αντικείμενα ή συμβάντα που εισέρχονται στο σύστημα για εξυπηρέτηση. Έτσι, προέκυψαν τα στοχαστικά μοντέλα των ουρών αναμονής, που αποδεικνύονται ιδιαίτερα χρήσιμα στα δίκτυα επικοινωνίας. Η περιορισμένη χωρητικότητα των καναλιών επικοινωνίας οδηγεί σε καταστάσεις αναμονής των πακέτων πληροφορίας που φτάνουν σε έναν κόμβο.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε **τα μοντέλα *M/M/s***. Πρόκειται για τα σπουδαιότερα στοχαστικά μοντέλα ουρών αναμονής, οπότε θα έχουμε μια καλή εικόνα της βασικής Θεωρίας Ουρών. Η γνώση τους αποτελεί πολύτιμο σύμβουλο στη λήψη αποφάσεων για την καλύτερη αντιμετώπιση καταστάσεων αναμονής.

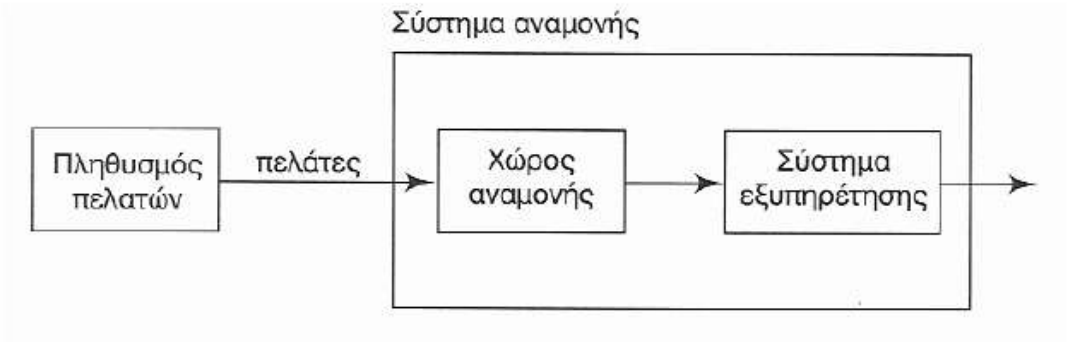
6.2 Χαρακτηριστικά συστημάτων ουρών αναμονής

Όταν μιλάμε για ένα σύστημα ουρών αναμονής, θα εννοούμε την

- άφιξη των πελατών,

- την ουρά αναμονής που δημιουργείται,
- την μία ή τις πολλές μονάδες εξυπηρέτησης (π.χ. μία μονάδα σερβιρίσματος στο εστιατόριο ή πολλά ταμεία σε μια τράπεζα) και
- τον τρόπο με τον οποίο εξυπηρετείται η ουρά.

Συνεπώς ένα σύστημα αναμονής έχει την παρακάτω μορφή:



Ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχονται οι αφίξεις των πελατών θεωρείται είτε άπειρος (πρακτικά πολύ μεγάλου μεγέθους) όπως π.χ. αυτοκίνητα σε σταθμούς διοδίων ή πεπερασμένος όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των μηχανών ενός εργοστασίου που αναμένουν επισκευή.

Ο τρόπος εξυπηρέτησης, η σειρά δηλαδή με την οποία εξυπηρετούνται οι πελάτες, μπορεί να είναι:

- FIFO (first in - first out): ο πρώτος πελάτης που εισέρχεται στο σύστημα εξυπηρετείται πρώτος. Είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος. Παράδειγμα, το γνωστό αριθμημένο χαρτάκι σε μια τράπεζα, εξασφαλίζει την εξυπηρέτηση FIFO.
- LIFO (last in – first out): ο τελευταίος πελάτης εξυπηρετείται πρώτος. Παράδειγμα, στον αποθηκευτικό χώρο ενός λεωφορείου, πρώτο βγαίνει το αντικείμενο που μπήκε τελευταίο.
- Τυχαίος. Παράδειγμα: επιλογή του πελάτη που θα εξυπηρετηθεί με κλήρωση.

Οι αφίξεις θεωρούνται τυχαίες όταν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη (δεν επηρεάζεται μία άφιξη από κάποια προηγούμενη) και η χρονική στιγμή πραγματοποίησης τους δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς. Στην περίπτωση αυτή ο μέσος ρυθμός των αφίξεων χαρακτηρίζεται από το μέσο αριθμό αφίξεων ανά μονάδα του χρόνου (π.χ. πελάτες ανά ώρα). Η τυχαία μεταβλητή «αριθμός των αφίξεων ανά μονάδα χρόνου», μπορεί πολλές φορές να προσεγγισθεί από την κατανομή Poisson. Αν γίνει αυτό, τότε η μέση τιμή της Poisson αντιστοιχεί στη μέση τιμή των αφίξεων

ανά μονάδα χρόνου, συμβολίζεται με λ και αποτελεί το μέσο ρυθμό αφίξεων στην μονάδα του χρόνου.

Όταν στη διαδικασία εισόδου παρατηρείται ότι ισχύει η κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό αφίξεων ίσο με λ, τότε ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή ίση με $1/\lambda$. Οι αφίξεις μπορεί να γίνονται είτε μία-μία είτε κατά ομάδες.

Ο χρόνος που απαιτείται για την εξυπηρέτηση του πελάτη μπορεί να είναι σταθερός ή όπως συμβαίνει και στα περισσότερα συστήματα ουρών αναμονής, να παρουσιάζει μεταβλητότητα που οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Για πολλές περιπτώσεις συστημάτων ουράς αναμονής, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή, με μέση τιμή $1/\mu$. Όμως, τότε το πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται σε ένα χρονικό διάστημα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή ίση με μ. Η εξυπηρέτηση των πελατών μπορεί να γίνεται είτε συνεχώς είτε κατά ορισμένα χρονικά διαστήματα.

Για τον πελάτη που αναμένει στην ουρά μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης. Στην περίπτωση αυτή ο πελάτης εξυπηρετείται από την πρώτη διαθέσιμη θέση εξυπηρέτησης.

Τέλος, ένα ακόμη ενδιαφέρον στοιχείο που αφορά την ουρά αναμονής είναι η χωρητικότητά της. **Η χωρητικότητα της ουράς μπορεί να είναι άπειρη** (πρακτικά, όποιος προσέρχεται μπορεί να μείνει) **ή πεπερασμένη** (όταν κάποιος προσέρχεται αφού έχουν καταληφθεί όλες οι θέσεις αναμονής, δεν μπορεί να εισέλθει στο σύστημα ή υπάρχουν αποθαρρυνόμενοι πελάτες).

6.3 Το μοντέλο M/M/s

Γενικά, στον συμβολισμό *A/B/s* για ένα μοντέλο ουρών αναμονής:

- Το σύμβολο *A* αναφέρεται στην κατανομή των αφίξεων
- Το σύμβολο *B* αναφέρεται στην κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης
- Το *s* αναφέρεται στον αριθμό των μονάδων εξυπηρέτησης.

Όταν ισχύει η πιο πάνω περιγραφή, δηλαδή η κατανομή των αφίξεων είναι Poisson ενώ η κατανομή των χρόνων εξυπηρέτησης είναι εκθετική, τότε στη θέση των συμβόλων *A* και *B* θέτουμε *M*.

Για μια γενική κατανομή (οποιαδήποτε) το αντίστοιχο σύμβολο *A* ή *B* είναι *G*.

Όταν έχουμε σταθερή κατανομή, δηλαδή ο αριθμός των αφίξεων ή ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι σταθερός, το αντίστοιχο σύμβολο *A* ή *B* είναι *D*.

Παράδειγμα: Όταν λέμε ότι έχουμε μοντέλο ***M/D/3*** εννοούμε ότι

- ο αριθμός των αφίξεων στο σύστημα ακολουθεί κατανομή Poisson (*M*),
- ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι σταθερός (*D*),
- υπάρχουν *3* μονάδες εξυπηρέτησης.

Το μοντέλο *M/M/s*, χρησιμοποιείται για την μελέτη ενός συστήματος αναμονής όπου ισχύουν τα εξής:

- Η διαδικασία αφίξεων των πελατών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο όρο αφίξεων λ ανά χρονική μονάδα.
- Υπάρχουν περισσότερες από μία παράλληλες θέσεις εξυπηρέτησης ($s > 1$).
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης σε κάθε θέση ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο πλήθος πελατών που εξυπηρετούνται σε κάθε θέση να είναι μ ανά χρονική μονάδα.
- Το πλήθος των πελατών στην πηγή είναι πρακτικά άπειρο, οι πελάτες εξυπηρετούνται με βάση τη σειρά προσέλευσης (FIFO), σχηματίζουν μια ουρά η οποία έχει άπειρη χωρητικότητα και δεν αποχωρούν όσο μεγάλη και αν είναι η ουρά και εξυπηρετούνται από την πρώτη διαθέσιμη μονάδα εξυπηρέτησης.
- Η θεμελιώδης σχέση που πρέπει να ισχύει για να μπορεί να υπάρξει κατάσταση ισορροπίας, είναι $\lambda < \mu$. Ένα σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, όταν η συμπεριφορά του δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες που υπάρχουν κατά την έναρξη της λειτουργίας του. Στα μοντέλα που εξετάζουμε, οι τύποι που χρησιμοποιούνται θεωρούν ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Ειδικότερα, **στο μοντέλο *M/M/1*** τα πάντα καθορίζονται από δύο παραμέτρους:

1) λ = **ρυθμός αφίξεων** (ο μέσος αριθμός αφίξεων ανά χρονική μονάδα)
2) μ = **ρυθμός εξυπηρέτησης** (ο μέσος αριθμός πελατών που εξυπηρετούνται ανά χρονική μονάδα).

Βασικά μεγέθη στο *M/M/1* και στο *M/M/s*	
i. Η πιθανότητα να μην υπάρχουν πελάτες στο σύστημα είναι:	
M/M/1 → $P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$	*M/M/s* → $P_{os} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}}$
ii. Η πιθανότητα να υπάρχουν *n* πελάτες στο σύστημα είναι:	
M/M/1 → $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$	*M/M/s* → $P_{ns} = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_{os}, & n \le s \\ \frac{1}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_{os}, & n > s \end{cases}$
iii. Η πιθανότητα ένας πελάτης που καταφθάνει, να αναμένει στην ουρά, είναι:	
M/M/1 → $P_w = \frac{\lambda}{\mu}$	*M/M/s* → $P_{ws} = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)P_{os}$
iv. Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι:	
M/M/1 → $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$	*M/M/s* → $L_{qs} = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!\,(s\mu-\lambda)^2}P_{os}$
v. Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα (δηλαδή στην ουρά και στην εξυπηρέτηση) είναι:	
M/M/1 → $L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$	*M/M/s* → $L_s = L_{qs} + \frac{\lambda}{\mu}$
vi. Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα είναι:	
M/M/1 → $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{L}{\lambda}$	*M/M/s* → $W_s = \frac{L_s}{\lambda}$
vii. Ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά είναι:	
M/M/1 → $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$	*M/M/s* → $W_q = \frac{L_{qs}}{\lambda}$

6.4 Προσέγγιση ενός συστήματος ουρών αναμονής με τη μέθοδο των ασαφών εκτιμητών

Ο Negi και Lee (*1992*) πρότειναν το συνδυασμό και την επέκταση, όπου είναι δυνατόν, της τυχαιότητας με την ασάφεια, ώστε να προκύψουν ασαφή μοντέλα αναμονής που θα αξιοποιούν τα πλεονεκτήματα και των δυο προσεγγίσεων, της πιθανοθεωρητικής και της ασαφούς. Ήταν μια σημαντική πρόταση που επέκτεινε τις εφαρμογές των ασαφών συνόλων στις ουρές αναμονής (Munoz and Ruspini, *2014*).

Η ασαφής εκτίμηση είναι μια επέκταση της εκτίμησης των διαστημάτων εμπιστοσύνης. Η χρήση ασαφών εκτιμητών για τις παραμέτρους μιας ουράς αναμονής συνδυάζει την κλασική πιθανοθεωρητική προσέγγιση με την ασαφή λογική. Ταυτόχρονα, αξιοποιεί τα πλεονεκτήματα των ασαφών συνόλων αλλά και των σημειακών εκτιμήσεων. Απαιτείται μόνο ένα σύνολο αμερόληπτων παρατηρήσεων, των χρόνων αφίξεων πελατών και των χρόνων εξυπηρέτησής τους, μέσω του οποίου συνόλου θα κατασκευασθούν ασαφείς εκτιμητές για το μέσο ρυθμό άφιξης πελατών και το μέσο χρόνο εξυπηρέτησής τους.

Εισάγοντας στην κλασική θεωρία των ουρών αναμονής την έννοια των μη ασυμπτωτικών ασαφών εκτιμητών, ουσιαστικά εισάγουμε τις ασαφείς στατιστικές στις κλασικές στατιστικές των ουρών αναμονής.

Έστω X_1 , X_2,..., X_n τυχαίο δείγμα μεγέθους n από μια κατανομή της άγνωστης παραμέτρου θ και ας θεωρήσουμε ότι οι τιμές $[\theta_l(a), \theta_r(a)]$ δηλώνουν τα *(1-α)100%* διαστήματα εμπιστοσύνης της παραμέτρου αυτής. Χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε μονότονη και συνεχή συνάρτηση της μορφής:

$$h_\gamma(\alpha) : (0, 1] \to \left[\frac{\gamma}{2}, 0.5\right], \gamma \in (0,1)$$

προκύπτει ένας ασαφής εκτιμητής $\tilde{\theta}_\gamma$ από τα ακόλουθα επάλληλα διαστήματα:

$$^{\alpha}\left(\tilde{\theta}_\gamma\right) = \left[\theta_l(2h_\gamma(\alpha)), \theta_r(2h_\gamma(\alpha))\right], \ a \in (0,1].$$

Στα μοντέλα ουρών αναμονής που περιγράφηκαν σε προηγούμενες παραγράφους, τόσο ο ρυθμός άφιξης των πελατών λ όσο και ο χρόνος εξυπηρέτησή τους μ ανήκουν στην οικογένεια των εκθετικών κατανομών, η οποία είναι μια κλάση κατανομών πιθανότητας που περιλαμβάνει, εκτός από την εκθετική και την κατανομή Poisson,

την κανονική κατανομή με γνωστή διακύμανση, τη διωνυμική κατανομή, την κατανομή γ, κ.α.

Επομένως, **η παράμετρος λ της κατανομής Poisson και η παράμετρος μ της εκθετικής κατανομής, μπορούν να παρασταθούν ως ασαφείς αριθμοί που θα προκύψουν από την ένωση όλων των α - τομών των ασαφών εκτιμητών τους.**

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\lambda}$ της παραμέτρου της κατανομής Poisson έχει α – τομές:

$$^{\alpha}\tilde{\lambda}_{\gamma} = \left[\lambda_l^{\alpha},\ \lambda_r^{a}\right] = \left[\hat{\lambda}\frac{x^2_{2y,h_\gamma(a)}}{2n},\ \hat{\lambda}\frac{x^2_{2y+2,1-h_\gamma(a)}}{2n}\right],\ a\in(0,1] \qquad \acute{o}\pi o\upsilon$$

$$y=\sum_{i=1}^{n}x_i \neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad ^{\alpha}\tilde{\lambda}_{\gamma} = \left[0,\ \frac{x^2_{2,1-h_\gamma(a)}}{2n}\right] \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \quad y=0$$

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}$ της παραμέτρου της εκθετικής κατανομής έχει α – τομές:

$$^{\alpha}\tilde{\mu}_{\gamma} = \left[\mu_l^{\alpha},\ \mu_r^{a}\right] = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\mu}\right)_l^{\alpha}\left(\frac{1}{\mu}\right)_r^{\alpha}\right]} = \left[\hat{\mu}\frac{x^2_{2n,h_\gamma(a)}}{2\sum_{i=1}^{n}x_i},\ \hat{\mu}\frac{x^2_{2n,1-h_\gamma(a)}}{2\sum_{i=1}^{n}x_i}\right],\ a\in(0,1] \qquad \acute{o}\pi o\upsilon$$

$$x^2_{2n,h_\gamma(a)} = F^{-1}\left(1-h_\gamma(\alpha)\right).$$

Παρακάτω, περιγράφονται με τη μέθοδο της ασάφειας, τα χαρακτηριστικά ενός συστήματος ουράς αναμονής τύπου *M/M/s*:

- **Η ασαφής πιθανότητα $\tilde{P}_{os}$ να μην υπάρχουν πελάτες στο σύστημα** είναι:

$$\tilde{P}_{os} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{\left(\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}\right)^n}{n!}\right] + \frac{\left(\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}\right)^s}{s!}\ \frac{s\tilde{\mu}}{s\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}}}$$

(ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης)

Η $\tilde{P}_{os}$ έχει α – τομές:

$$^{\alpha}\tilde{P}_{os} = \left[\frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{\lambda_l^a}{n!\,\mu_r^a}\right] + \left(\frac{\lambda_l^a}{\mu_r^a}\right)^s \frac{s\mu_l^a}{s!\left(s\mu_r^a - \lambda_l^a\right)}}, \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{\lambda_r^a}{n!\,\mu_l^a}\right] + \left(\frac{\lambda_r^a}{\mu_l^a}\right)^s \frac{s\mu_r^a}{s!\left(s\mu_l^a - \lambda_r^a\right)}} \right].$$

▶ **Η ασαφής πιθανότητα $\tilde{P}_{ws}$ ένας πελάτης που καταφθάνει, να αναμένει στην ουρά,** είναι:

$$\tilde{P}_{ws} = \tilde{P}_{os}\,\frac{1}{s!}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^s \left(\frac{s\,\tilde{\mu}}{s\,\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}}\right) \qquad \text{(ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης)}$$

Η $\tilde{P}_{ws}$ έχει α – τομές:

$$^{\alpha}\tilde{P}_{ws} = \left[P_{osl}^a\,\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda_l^a}{\mu_r^a}\right)^s \frac{s\mu_l^a}{s\mu_r^a - \lambda_l^a},\; P_{osr}^a\,\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda_r^a}{\mu_l^a}\right)^s \frac{s\mu_r^a}{s\mu_l^a - \lambda_r^a} \right] = \left[P_{wsl}^a,\, P_{wsr}^a\right]$$

▶ **Η ασαφής πιθανότητα $\tilde{P}_{ns}$ να υπάρχουν *n* πελάτες στο σύστημα,** είναι:

$$\tilde{P}_{ns} = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \tilde{P}_{os} & , \quad n \le s \\ \frac{1}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \tilde{P}_{os} & , \quad n > s \end{cases} \qquad \text{(ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης)}$$

Η $\tilde{P}_{ns}$ έχει α – τομές:

$$^{\alpha}\tilde{P}_{ns} = [P_{nsl}^a,\, P_{nsr}^a] = \begin{bmatrix} P_{osl}^a\,\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda_l^a}{\mu_r^a}\right)^n & n \le s & P_{osr}^a\,\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda_r^a}{\mu_l^a}\right)^n & n \le s \\ P_{osl}^a\,\frac{1}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda_l^a}{\mu_r^a}\right)^n & n \ge s & P_{osr}^a\,\frac{1}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda_r^a}{\mu_l^a}\right)^n & n \ge s \end{bmatrix},$$

- **Ο ασαφής εκτιμώμενος αριθμός πελατών στην ουρά αναμονής** $\tilde{L}_{qs}$ **,** είναι:

$$\tilde{L}_{qs} = \frac{\tilde{\lambda}\,\tilde{\mu}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^{s}}{(s-1)!\left(s\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}\right)^{2}}\tilde{P}_{os} \qquad \text{(ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης)}$$

Η $\tilde{L}_{qs}$ έχει α – τομές:

$$^{\alpha}\tilde{L}_{qs} = \left[P^{a}_{osl}\frac{1}{(s-1)!}\frac{\left(\frac{\lambda^{a}_{l}}{\mu^{a}_{r}}\right)^{s}\left(\lambda^{a}_{l}\mu^{a}_{l}\right)}{\left(s\mu^{a}_{r}-\lambda^{a}_{l}\right)^{2}},\ P^{a}_{osr}\frac{1}{(s-1)!}\frac{\left(\frac{\lambda^{a}_{r}}{\mu^{a}_{l}}\right)^{s}\left(\lambda^{a}_{r}\mu^{a}_{r}\right)}{\left(s\mu^{a}_{l}-\lambda^{a}_{r}\right)^{2}}\right] = \left[L^{a}_{qsl},\ L^{a}_{qsr}\right]$$

- **Ο ασαφής εκτιμώμενος αριθμός πελατών στο σύστημα** $\tilde{L}_{s}$**,** είναι:

$$\tilde{L}_{s} = \tilde{L}_{qs} + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \qquad \text{(ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης)}$$

Η $\tilde{L}_{s}$ έχει α – τομές:

$$^{\alpha}\tilde{L}_{s} = \left[P^{a}_{osl}\frac{1}{(s-1)!}\frac{\left(\frac{\lambda^{a}_{l}}{\mu^{a}_{r}}\right)^{s}\left(\lambda^{a}_{l}\mu^{a}_{l}\right)}{\left(s\mu^{a}_{r}-\lambda^{a}_{l}\right)^{2}}+\frac{\lambda^{a}_{l}}{\mu^{a}_{r}},\ P^{a}_{osr}\frac{1}{(s-1)!}\frac{\left(\frac{\lambda^{a}_{r}}{\mu^{a}_{l}}\right)^{s}\left(\lambda^{a}_{r}\mu^{a}_{r}\right)}{\left(s\mu^{a}_{l}-\lambda^{a}_{r}\right)^{2}}+\frac{\lambda^{a}_{r}}{\mu^{a}_{l}}\right]$$

- **Ο ασαφής εκτιμώμενος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά** $\tilde{W}_{qs}$ **,** είναι:

$$\tilde{W}_{qs} = \frac{\tilde{L}_{qs}}{\tilde{\lambda}} \qquad \text{(ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης)}$$

Η $\tilde{W}_{qs}$ έχει α – τομές:

$$^{\alpha}\tilde{W}_{qs} = \left[P_{osl}^{a} \frac{1}{(s-1)!} \frac{\left(\frac{\lambda_l^a}{\mu_r^a}\right)^s \left(\lambda_l^a \mu_l^a\right)}{\left(s\mu_l^a - \lambda_r^a\right)^2 \lambda_l^a}, P_{osr}^{a} \frac{1}{(s-1)!} \frac{\left(\frac{\lambda_r^a}{\mu_l^a}\right)^s \left(\lambda_r^a \mu_r^a\right)}{\left(s\mu_l^a - \lambda_r^a\right)^2 \lambda_r^a} \right]$$

- **Ο ασαφής εκτιμώμενος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα $\tilde{W}_s$,** είναι:

$$\tilde{W}_s = \frac{\tilde{L}_s}{\tilde{\lambda}} \qquad \text{(ασαφοποίηση της κλασικής περίπτωσης)}$$

Η $\tilde{W}_s$ έχει α – τομές:

$$^{\alpha}\tilde{W}_{s} = \left[P_{osl}^{a} \frac{1}{(s-1)!} \frac{\left(\frac{\lambda_l^a}{\mu_r^a}\right)^s \left(\lambda_l^a \mu_l^a\right)}{\left(s\mu_l^a - \lambda_r^a\right)^2 \lambda_l^a} + \frac{1}{\mu_r^a}, P_{osr}^{a} \frac{1}{(s-1)!} \frac{\left(\frac{\lambda_r^a}{\mu_l^a}\right)^s \left(\lambda_r^a \mu_r^a\right)}{\left(s\mu_r^a - \lambda_l^a\right)^2 \lambda_r^a} + \frac{1}{\mu_l^a} \right]$$

6.5 Άσκηση

Ένα κέντρο εξυπηρέτησης έχει *1* θέση εξυπηρέτησης και χώρο αναμονής που χωράει *5* πελάτες. Οι πελάτες καταφθάνουν στο κέντρο τυχαία, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson. Τα αποτελέσματα *110* μετρήσεων – αριθμού αφίξεων νέων πελατών στην ουρά αναμονής στη χρονική διάρκεια μιας ώρας (μονάδα χρόνου) - είναι: *19, 11, 14, 18, 15, 10, 11, 10, 11, 12, 11, 6, 9, 18, 10, 11, 9, 6, 9, 10, 9, 10, 11, 10, 12, 20, 9, 10, 9, 10, 6, 15, 8, 10, 11, 5, 10, 11, 9, 5, 14, 11, 10, 5, 10, 8, 9, 20, 12, 10, 11, 15, 9, 12, 6, 7, 6, 5, 11, 10, 5, 11, 11, 19, 6, 9, 6, 6, 10, 11, 11, 5, 10, 15, 10, 13, 11, 9, 7, 10, 7, 9, 8, 11, 10, 9, 10, 10, 14, 8, 5, 6, 10, 11, 6, 9, 14, 11, 9, 10, 11, 10, 10, 9, 14, 11, 9 ,11, 15, 17.*

Όταν ο χώρος αναμονής είναι γεμάτος, οι πελάτες που καταφθάνουν στο σταθμό δεν εισέρχονται σε αυτόν, αλλά πάνε σε άλλο σταθμό. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη ακολουθεί εκθετική κατανομή. Τα αποτελέσματα *110*

μετρήσεων – αριθμού εξυπηρετούμενων πελατών από μια θέση εξυπηρέτησης στη χρονική διάρκεια μιας ώρας - είναι: *7, 14, 15, 12, 15, 6, 9, 14, 15, 15, 6, 15, 12, 8, 13, 12, 14, 10, 15, 12, 13, 8, 14, 7, 9, 7, 14, 7, 15, 11, 10, 14, 10, 8, 5, 13, 12, 10, 15, 13, 7, 8, 13, 12, 8, 12, 6, 8, 7, 12, 13, 10, 8, 15, 7, 13, 14, 12, 6, 13, 15, 7, 14, 8, 12, 6, 15, 13, 7, 15, 7, 13, 15, 13, 9, 7, 15, 12, 8, 14, 6, 9, 15, 5, 15, 6, 12, 8, 13, 8, 12, 14, 15, 10, 8, 13, 6, 8, 14, 12, 7, 15, 13, 15, 12, 8, 14, 7, 15, 16.*

Να υπολογίσετε:

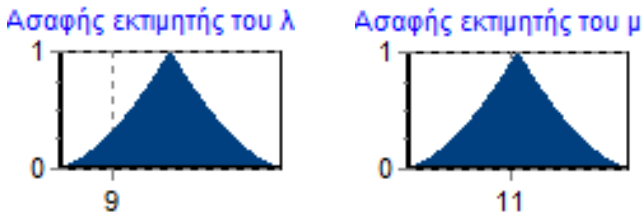
i. την πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο κέντρο εξυπηρέτησης
ii. την πιθανότητα ένας πελάτης που καταφθάνει στο κέντρο να αναμένει στην ουρά
iii. το μέσο αριθμό πελατών που θα αναμένουν στην ουρά αναμονής
iv. το μέσο αριθμό πελατών στο κέντρο
v. το μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη στην ουρά
vi. το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο κέντρο

<u>Λύση:</u>

Γνωρίζουμε ότι **ο ασαφής εκτιμητής μπορεί να παρασταθεί είτε με τη συνάρτηση συμμετοχής, είτε με τις *α* – τομές.** Και οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι. Θα χρησιμοποιήσουμε τις *α* – τομές (κλασικά σύνολα), γιατί έχουμε μεγάλη ευχέρεια στην πραγματοποίηση πράξεων.

Για την δημιουργία των ασαφών εκτιμητών θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό Fuzzy Arithmetic Operations. Όλοι οι ασαφείς εκτιμητές προσδιορίσθηκαν καταρχήν για *90%* διάστημα εμπιστοσύνης ($\gamma=0.10$), ώστε να προκύψουν οι τιμές του στηρίγματος του ασαφούς εκτιμητή.

Στο σχήμα *1*, δίνεται ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\lambda}$ του μέσου αριθμού αφίξεων πελατών, δηλαδή της παραμέτρου λ της κατανομής Poisson. Επίσης, δίνεται ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}$ του μέσου αριθμού εξυπηρέτησης πελατών, δηλαδή της παραμέτρου μ της εκθετικής κατανομής.



Σχήμα 1

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\lambda}$ έχει α – τομές:

${}^{\alpha}\left(\tilde{\lambda}\right) = [8.77,\ 9.80]$. Επίσης, οι *1* – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{\lambda}\right) = [9.28,\ 9.28]$

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{\mu}$ έχει α – τομές:

${}^{\alpha}\left(\tilde{\mu}\right) = [10.53,\ 11.55]$. Οι 1 – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{\mu}\right) = [11.04,\ 11.04]$

Παρατηρούμε ότι ο μέσος αριθμός αφίξεων πελατών είναι $\lambda = 9.28$ πελάτες ανά ώρα, ενώ ο μέσος αριθμός εξυπηρέτησης πελατών είναι $\mu = 11.04$ πελάτες ανά ώρα. Επειδή $\lambda < \mu$, η ουρά αναμονής μπορεί να εξυπηρετηθεί.

i. Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{P}_o$ $\left(\tilde{P}_o = \dfrac{\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)$ της πιθανότητας να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο κέντρο εξυπηρέτησης, δίνεται στο σχήμα *2*.

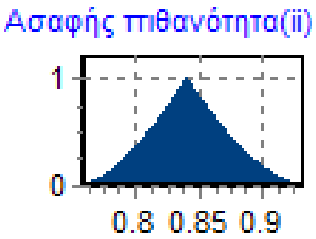
Σχήμα 2

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{P}_o$ έχει α – τομές:

${}^{\alpha}\left(\tilde{P}_o\right) = [0.06,\ 0.26]$. Οι *1* – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{P}_o\right) = [0.16,\ 0.16]$

Η επικρατέστερη πιθανότητα να μην υπάρχει κανένας πελάτης στο κέντρο εξυπηρέτησης είναι *16%*, με οριακές τιμές μεταξύ *6%* και *26%* για διάστημα εμπιστοσύνης *90%*.

ii. Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{P}_w$ $\left(\tilde{P}_w = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)$ της πιθανότητας ένας πελάτης που καταφθάνει στο κέντρο να αναμένει στην ουρά, δίνεται στο σχήμα *3*.



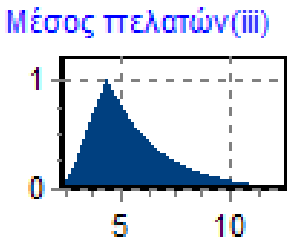
Σχήμα 3

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{P}_w$ έχει α – τομές:

${}^{\alpha}\left(\tilde{P}_w\right) = [0.76,\ 0.93]$. Οι *1* – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{P}_w\right) = [0.84,\ 0.84]$

Η επικρατέστερη πιθανότητα είναι *84%*, με οριακές τιμές μεταξύ *76%* και *93%*.

iii. Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{L}_q$ $\left(\tilde{L}_q = \frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\mu}\left(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}\right)}\right)$ του μέσου αριθμού πελατών που θα αναμένουν στην ουρά αναμονής, δίνεται στο σχήμα *4*.



Σχήμα 4

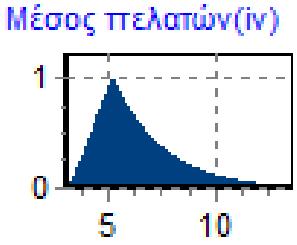
Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{L}_q$ έχει α – τομές:

${}^{\alpha}\left(\tilde{L}_q\right) = [2.39,\ 12.50]$. Οι *1* – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{L}_q\right) = [4.45,\ 4.45]$

Η επικρατέστερη τιμή του μέσου αριθμού είναι περίπου *4.5* πελάτες με οριακές τιμές μεταξύ *2.39* και *12.50*. Δεδομένου ότι ο χώρος αναμονής χωράει *5* πελάτες, η διεύθυνση του κέντρου θα πρέπει να προβεί σε ενέργειες για να επιταχυνθεί η

εξυπηρέτηση των πελατών.

iv. Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{L}$ $\left(\tilde{L} = \dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}}\right)$ του μέσου αριθμού πελατών στο κέντρο, δίνεται στο σχήμα *5*.

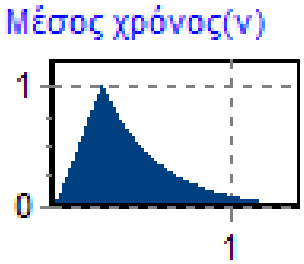


Σχήμα 5

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{L}$ έχει α – τομές:
${}^{\alpha}\left(\tilde{L}\right) = [3.15, 13.43]$. Οι *1* – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{L}\right) = [5.29, 5.29]$

Η επικρατέστερη τιμή του μέσου αριθμού πελατών στο κέντρο είναι *5.29* πελάτες με οριακές τιμές μεταξύ *3.15* και *13.43* πελάτες.

v. Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{W}_q$ $\left(\tilde{W}_q = \dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}\left(\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}\right)}\right)$ του μέσου χρόνου αναμονής ενός πελάτη στην ουρά, δίνεται στο σχήμα *6*.



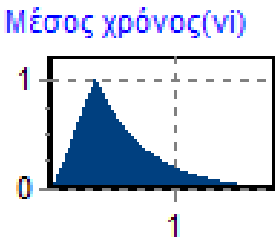
Σχήμα 6

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{W}_q$ έχει α – τομές:

${}^{\alpha}\left(\tilde{W}_q\right) = [0.27, 1.28]$. Οι *1* – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{W}_q\right) = [0.48, 0.48]$

Ο επικρατέστερος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι *0.48* ώρες = *28.8* λεπτά με οριακές τιμές μεταξύ *0.27* και *1.28* ώρες.

vi. Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{W}$ $\left(\tilde{W} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{\lambda}}\right)$ του μέσου χρόνου αναμονής ενός πελάτη στο κέντρο, δίνεται στο σχήμα *7*.



Σχήμα 7

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{W}$ έχει α – τομές:

${}^{\alpha}\left(\tilde{W}\right) = [0.32, 1.53]$. Οι *1* – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{W}\right) = [0.57, 0.57]$

Ο επικρατέστερος χρόνος αναμονής στο κέντρο είναι *0.57* ώρες = *34.2* λεπτά με οριακές τιμές μεταξύ *0.32* και *1.53* ώρες.

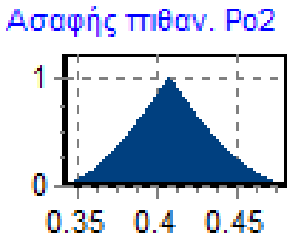
Παρατηρούμε ότι

- ✓ η επικρατέστερη πιθανότητα ένας πελάτης που καταφθάνει στο κέντρο να αναμένει στην ουρά, είναι *84%*
- ✓ ο επικρατέστερος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι *0.48* ώρες με οριακές τιμές μεταξύ *0.27* και *1.28* ώρες.

Για την πιο γρήγορη εξυπηρέτηση των πελατών προστίθεται και *2η* θέση εξυπηρέτησης, ενώ κάθε πελάτης εξυπηρετείται από την πρώτη διαθέσιμη θέση.

Τότε, ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{P}_{o2}$ $\left(\tilde{P}_{o2} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1}\left[\frac{(\tilde{\lambda}/\tilde{\mu})^n}{n!}\right] + \frac{(\tilde{\lambda}/\tilde{\mu})^2}{2!}\,\frac{2\tilde{\mu}}{2\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}}} = \frac{2\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}}{2\tilde{\mu}+\tilde{\lambda}}\right)$

της πιθανότητας να μην υπάρχουν πελάτες στο σύστημα, δίνεται στο παρακάτω σχήμα:

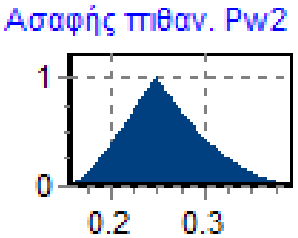


Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{P}_{o2}$ έχει α – τομές:

${}^{\alpha}\left(\tilde{P}_{o2}\right) = [0.34,\ 0.48]$. Οι 1 – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{P}_{o2}\right) = [0.41,\ 0.41]$

Η επικρατέστερη πιθανότητα είναι *41%*, με οριακές τιμές μεταξύ *34%* και *48%*.

Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{P}_{w2}$ $\left(\tilde{P}_{w2} = \tilde{P}_{o2}\frac{1}{2!}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^2\left(\frac{2\tilde{\mu}}{2\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}}\right) = \tilde{P}_{o2}\frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\mu}(2\tilde{\mu}-\tilde{\lambda})}\right)$ της πιθανότητας ένας πελάτης που καταφθάνει να αναμένει στην ουρά, δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Ο ασαφής εκτιμητής $\tilde{P}_{w2}$ έχει α – τομές:

${}^{\alpha}\left(\tilde{P}_{w2}\right) = [0.16,\ 0.39]$. Οι *1* – τομές είναι: ${}^{1}\left(\tilde{P}_{w2}\right) = [0.25,\ 0.25]$

Η επικρατέστερη πιθανότητα είναι *25%*, με οριακές τιμές μεταξύ *16%* και *39%*.

Δηλαδή έχουμε σαφώς πιο γρήγορη εξυπηρέτηση των πελατών.

Παρόμοια μπορούμε να πειραματιστούμε με άλλους υπολογισμούς και μάλιστα με διαφορετικά διαστήματα εμπιστοσύνης, καταλήγοντας στα ανάλογα αποτελέσματα.

6.6 Συμπεράσματα

Με τη μέθοδο των ασαφών εκτιμητών σε συστήματα ουρών αναμονής

- ✓ παρέχεται σίγουρα μια δυνατότητα διαχείρισης ενδεχόμενης έλλειψης ικανοποιητικού αριθμού μετρήσεων ή αμφιβολίας σχετικά με την ποιότητα των μετρήσεων
- ✓ η χρήση των διαστημάτων εμπιστοσύνης αμβλύνει την αβεβαιότητα των σημειακών εκτιμήσεων
- ✓ προσδιορίζεται όχι η πιθανότητα, αλλά ο ασαφής αριθμός "πιθανότητα" παρέχοντας με αυτό τον τρόπο περισσότερες δυνατότητες διερεύνησης
- ✓ είναι πιο εύχρηστη η πραγματοποίηση πράξεων μεταξύ των α – τομών.

Περαιτέρω εφαρμογές της μεθόδου των ασαφών εκτιμητών σε πραγματικές περιπτώσεις ουρών αναμονής, θα αποτελούσαν χρήσιμα εργαλεία για να υπάρχει μια σύγκριση με την κατάσταση που διαμορφώνεται σε αυτές με χρήση των αποτελεσμάτων της κλασικής θεωρίας των ουρών αναμονής. Έτσι, χωρίς να υπάρχουν μετρήσιμα αποτελέσματα δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε μια μέθοδο καλύτερη ή σωστότερη από την άλλη.

Επίλογος

Στην παρούσα εργασία ερευνήθηκαν οι ασαφείς εκτιμητές μια ιδιαίτερα σημαντική και χρήσιμη εφαρμογή των ασαφών συνόλων.

Αρχικά, έγινε μία σύντομη αναφορά στην ασαφή λογική, στα ασαφή σύνολα και στους ασαφείς αριθμούς.

Στη συνέχεια, έγινε μια εισαγωγή στην εκτιμητική στατιστική με ιδιαίτερη μνεία στην σημειακή εκτίμηση και στην εκτίμηση με διάστημα εμπιστοσύνης.

Ακολούθησε εκτενής ανάλυση της δημιουργίας των ασαφών εκτιμητών, με αναφορά στους ασυμπτωτικούς και στους μη ασυμπτωτικούς ασαφείς εκτιμητές.

Υπήρξε τεκμηριωμένη – με πολλά παραδείγματα – ανάλυση της ευχρηστίας των ασαφών εκτιμητών.

Τέλος, με τη βοήθεια των ασαφών εκτιμητών προτάθηκε μια νέα μεθοδολογία διαχείρισης των ουρών αναμονής, μέσω της εκτίμησης των διαφόρων χαρακτηριστικών τους.

Ένα ενδιαφέρον θέμα προς περαιτέρω μελέτη είναι να γίνουν εφαρμογές της μεθόδου της ασάφειας σε πραγματικές περιπτώσεις ουρών αναμονής και να συγκριθεί η κατάσταση που διαμορφώνεται σε αυτές, με χρήση των αποτελεσμάτων της κλασικής θεωρίας των ουρών αναμονής και αυτών που προκύπτουν από τη χρήση των ασαφών εκτιμητών.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Α. Ξενόγλωσσες

Buckley J.James, Fuzzy Probability and Statistics, Springer, Germany, *2006*.

Buckley, Jowers, Simulating Continuous Fuzzy Systems, Springer, *2006*.

A. Falsafain, S.M. Taheri, and M. Mashinchi, Fuzzy Estimation of Parameters in Statistical Models, World Academy of Science, Engineering and Technology *38 2008*.

G.J. Klir, Uncertainty and information, Foundations of Generalized Information Theory, Wiley, *2006*.

Kosko B., Fuzzy Logic – Η Νέα Επιστήμη, Λέξημα, *1997*, μετάφραση από το πρωτότυπο: Fuzzy Thinking.

Munoz, Ruspini, Simulation of Fuzzy Queueing Systems with a variable number of servers, arrival rate, and service rate, *2014*.

Negi. D.S. and Lee. E.S., Analysis and Simulation of Fuzzy Queue, *1992*.

B.K. Papadopoulos, K.A. Chrysafis, On Theoritical Pricing of Options with Fuzzy Estimators, Journal of Computational and Applied Mathematics, *2009*.

B.K.Papadopoulos, D.S.Sfiris, Fuzzy Estimators in Expert Systems, Applied Mathematical Sciences, Vol. *6*, *2012*, no. *35*, *1695 – 1718*.

Lotfi Zadeh, Fuzzy Logic-A New Look, Flins Conference, Madrid, *2008*.

Β. Ελληνόγλωσσες

Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτου, Χ. Α. Χαραλαμπίδη, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και στη Στατιστική (Διδακτικές Σημειώσεις), Αθήνα, *2003*.

Γ. Θεοδώρου, Εισαγωγή στην Ασαφή Λογική, *2010*.

Γ. Λυμπερόπουλου, Συστήματα Ουρών Αναμονής (Διδακτικές Σημειώσεις), Βόλος,

2012.

Β. Μάγκλαρη, Συστήματα Αναμονής (Διδακτικές Σημειώσεις), Αθήνα, *2015*.

Β. Παπαδόπουλου, Γ. Μποτζώρη, Ασαφής Λογική, Ξάνθη, *2015*.

Γ. Παπαδόπουλου, Εκτιμητική (Διδακτικές Σημειώσεις), Αθήνα, *2015*.

Τ. Παπαϊωάννου, Σ. Λουκά, Εισαγωγή στη Στατιστική, Ιωάννινα, *1990*.

Δ. Φουσκάκη, Εκτιμητική Στατιστική (Διδακτικές Σημειώσεις), Αθήνα, *2016*.

Λογισμικό

Fuzzy Arithmetic Operations, Σφυρής Δημήτριος, Ξάνθη, *2007*.