# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

**1)** Θεωρούμε την ακολουθία $(\alpha_\nu)$ των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, …
α) Να αιτιολογήσετε γιατί η $(\alpha_\nu)$ είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.
β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

Απάντηση:

**2)** Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1) , με παράμετρο $\lambda \in R$.
α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό *λ,* ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.
β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\geq 0$, όπου *S* και *P* είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

Απάντηση:

**3)** Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει ***α*** καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.
α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

Απάντηση:

**4)** Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda-1) = 0$ , με παράμετρο $\lambda \in R$
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.
β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$.
γ) Αν $x_1$ , $x_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda$ ισχύει:

i. $x_1 + x_2 = x_1 . x_2$
ii. $(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0$.

Απάντηση:

**5)** Αν $0 < \alpha < 1$, τότε
α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$
β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:
$0, \alpha^3, 1, \alpha, 1/\alpha$

Απάντηση:

**6)** α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.
β) Αν α, β με α< β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

Απάντηση:

**7)** α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$.
β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

Απάντηση:

**8)** Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.
α) Να βρείτε τις ρίζες του.
β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1<0$
γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης:
$2x^2 - 3x + 1<0$

Απάντηση:

**9)** Δίνονται οι ανισώσεις: $3x - 1 < x + 9$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$
α) Να βρείτε τις λύσεις τους.
β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

Απάντηση:

**10)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in R$.
α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της *f* με τους άξονες.

Απάντηση:

**11)** α) Να λύσετε την εξίσωση $| x - 2 | = \sqrt{3}$.
β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

Απάντηση:

**12)** Οι διαστάσεις (σε m) του πατώματος του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι $(x+1)$ και $x$, με $x>0$. α) Να γράψετε με τη βοήθεια του $x$ την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος. β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 $m^2$, να βρείτε τις διαστάσεις του.

Απάντηση:

**13)** Σε γεωμετρική πρόοδο $(α_ν)$ με θετικό λόγο λ, ισχύει: $α_3=1$ και $α_5=4$.
α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.
β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $α_ν=2^{ν-3}$.

Απάντηση:

**14)** α) Αν $α < 0$, να αποδειχθεί ότι: $α + \frac{1}{α} \leq -2$
β) Αν $α <0$, να αποδειχθεί ότι: $|α| + \left|\frac{1}{α}\right| \geq 2$

Απάντηση:

**15)** α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1,2,3,…ν.
β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

Απάντηση:

**16)** α) Αν *α, β* $\in \mathbb{R}$ - {0}, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1).

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση:

**17)** Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές f(-1), f(3) και f(5).

γ) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 25.

Απάντηση:

**18)** Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

Απάντηση:

**19)** Δίνεται αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$ για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$ .

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 6.

β) Να βρείτε τον $\alpha_{20}$ .

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Απάντηση:

**20)** α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του *y* ισχύει : $|y-3| < 1$.

β) Αν *x, y* είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου *Π* είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

Απάντηση:

**21)** α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$.

β) Αν κάποιος αριθμός *α* επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:
$\left|\frac{1}{9}\right| < \left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$

Απάντηση:

**22)** Έστω *x, y* πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$

Απάντηση:

**23)** Δίνεται η συνάρτηση *f*, με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού $\alpha$, ώστε το σημείο $M(\alpha, \frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$.

Απάντηση:

**24)** Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0{,}8x$
α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;
β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

Απάντηση:

**25)** Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$
α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση Κ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι παράσταση Κ σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Απάντηση:

**26)** Δίνεται το τριώνυμο: $-x^2 + (\sqrt{3}-1)x + \sqrt{3}$
α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (\sqrt{3}+1)^2$
β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Απάντηση:

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** α) 3-1=2 5-3=2 7-5=2

Οι όροι διαφέρουν μεταξύ τους κατά 2, άρα έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1=1$ και διαφορά ω=2.

$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega$

$\alpha_{100}=1+(100-1)\cdot 2=1+99\cdot 2=1+198=199$

β) $S_\nu = \frac{[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega]\cdot\nu}{2} = \ldots = \nu^2$

**2.** α) $\Delta= -3\lambda^2-4\lambda+4$. Είναι: $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -2\leq\lambda\leq\frac{2}{3}$ β) $\lambda\in[-2, -1]$

**3.** α) Είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω=α

β) $\alpha_7 = \alpha_1+(7-1)\cdot\alpha \Leftrightarrow \alpha_7=\alpha_1+6\cdot\alpha \Leftrightarrow 36=\alpha_1+6\cdot\alpha$ (1)

$S_\nu = \frac{[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega]\cdot\nu}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 60=2\alpha_1+9\cdot\alpha$ (2)

Λύνουμε το σύστημα (1), (2) και βρίσκουμε: α=4, $\alpha_1=12$

| **Σειρά** | **Καθίσματα** |
|---|---|
| 1η | $\alpha_1$= 12 |
| 2η | $\alpha_2$= 16 |
| 3η | $\alpha_3$= 20 |
| 4η | $\alpha_4$= 24 |
| 5η | $\alpha_5$= 28 |
| 6η | $\alpha_6$= 32 |
| 7η | $\alpha_7$= 36 |
| 8η | $\alpha_8$= 40 |
| 9η | $\alpha_9$= 44 |
| 10η | $\alpha_{10}$= 48 |
| Άθροισμα | 300 |

**4.** α) $\Delta= (2\lambda-4)^2$ β) Είναι $\Delta\geq 0$ άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες $\forall\ \lambda\in R$
γ) i. Είναι: $S=2\lambda$ και $P=4(\lambda-1)$ οπότε $S=P\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow\lambda=2$ ii. $S= 2\lambda$ και $P=4(\lambda-1)$ οπότε $S^2 + P + 5= 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow\lambda= -\frac{1}{2}$.

**5.** α) $\alpha^3 < \alpha \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)<0$. Από τη $0<\alpha<1$ έχουμε: $0<\alpha \Rightarrow 1<\alpha+1 \Rightarrow 0<\alpha+1$ (αφού 0<1) και $\alpha<1 \Rightarrow \alpha-1<0$. Τελικά προκύπτει $\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)<0$
β) $0< \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$

**6.** α) χ=2 ή χ= -1 β) Επειδή α<β, είναι α= -1 και β= 2 και τελικά βρίσκουμε χ=3 ή χ= -1

**7.** α) $|2x-5|\leq 3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 1\leq\chi\leq 4$ , $2x^2 - x - 1\geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \chi\in(-\infty, -1/2]\cup[1, +\infty)$, β) $\chi\in[1, 4]$.

**8.** α) $\chi=1$ ή $\chi=\frac{1}{2}$ β) $\chi \in (\frac{1}{2}, 1)$ γ) Είναι λύσεις τις ανίσωσης αφού μπορούνε να δείξουμε ότι ανήκουν στο $(\frac{1}{2}, 1)$.

**9.** α) $\chi \geq 1$ β) $[1, 5)$.

**10.** α) -43 β) Με τον y'y το (0, -15) και με τον χ'χ τα (-5, 0) & (3, 0).

**11.** α) $\chi = 2+\sqrt{3}$ ή $\chi = 2-\sqrt{3}$ β) $\chi^2 - 4\chi + 1 = 0$

**12.** α) $\Pi=4\chi+2$, $E=\chi^2+\chi$ β) $\chi_1=9$, δεκτή $\chi_2=-10$, απορρίπτεται αφού πρέπει $\chi>0$. Άρα οι διαστάσεις του πατώματος είναι 9 και 10 μέτρα.

**13.** α) $\lambda=2$, $\alpha_1=1/4$ β) $\alpha_\nu=\alpha_1.\lambda^{\nu-1} = \ldots = 2^{\nu-3}$

**14.** α) $\alpha+\frac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 \geq 0$, που ισχύει
β) $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha} \leq -2$, που ισχύει από το α).

**15.** α) Οι διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι 1, 2, 3, … , ν αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1=1$ και $\omega=1$. Άρα $S_\nu = \ldots = \frac{\nu}{2}(\nu+1)$ β) $S_\nu=45 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \nu_1=9 \in N$, δεκτή και $\nu_2=-10$, απορρίπτεται. Άρα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους πρώτους 9 διαδοχικούς θετικούς ακεραίους για να πάρουμε άθροισμα 45.

**16.** α) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{(|\alpha|-|\beta|)^2}{|\alpha||\beta|} \geq 0$ που ισχύει
β) $\frac{(|\alpha|-|\beta|)^2}{|\alpha||\beta|}=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha=\pm\beta$. Άρα η ισότητα ισχύει όταν $\alpha, \beta \in R-\{0\}$ είναι ίσοι ή αντίθετοι.

**17.** α) $(-\infty, 3] \cup (3, 10) = (-\infty, 10)$ β) $f(5)=25$ γ) $\chi=5$

**18.** α) $\alpha_\nu=20\nu+100$ για ν=1, 2, … ,10 β) $\alpha_{10}=300$ καθίσματα γ) $S_{10}=2100$ καθίσματα

**19.** α) $\omega=6$ β) $\alpha_{20}=133$ γ) $S_{20}=1520$

**20.** α) $2<y<4$ β) Είναι: $\Pi=2x+2y=2(x+y)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ανισοτικές σχέσεις καταλήγουμε στην $6<\Pi<14$.

**21.** α) $1<\chi<9$ β) $\alpha \in (1, 9)$ άρα $1 > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{9} \Rightarrow \left|\frac{1}{9}\right| < \left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$

**22.** α) $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y=2\chi$ β) $A=8$

**23.** α) $\chi \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ β) $\alpha=\pm 3$, δεκτές, αφού ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

**24.** α) 55 χιλιόμετρα β) 50 λεπτά

**25.** α) $\chi \in R-\{-2, 3\}$ β) $K=0$, σταθερή

**26.** α) $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma = \ldots = (\sqrt{3}+1)^2$ β) $-(\chi+1).(\chi-\sqrt{3})$

ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ