ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 9 και ΑΓ = 15. Από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου, φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ , που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

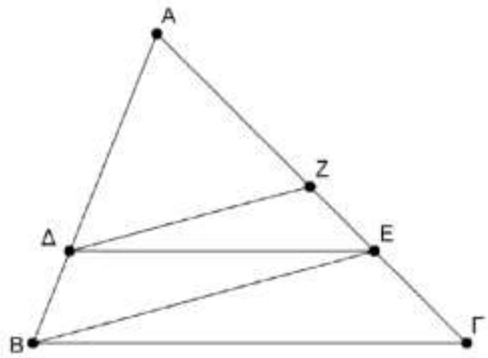
α) Να αποδείξετε ότι $\frac{Α\Delta}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$ και $\frac{Α\Delta}{ΑΒ}$ = 2.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΓΕ .

Απάντηση:

2. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς τη ΒΕ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ .

Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{ΑΕ}{Α\Delta} = \frac{Α\Gamma}{ΑΒ}$

β) $\frac{ΑΖ}{Α\Delta} = \frac{ΑΕ}{ΑΒ}$

γ) $\frac{ΑΕ}{Α\Gamma} = \frac{ΑΖ}{ΑΕ}$

Υπόδειξη:

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ . Φέρνουμε από το σημείο Δ παράλληλες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν αντίστοιχα στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\Delta Ε}{Α\Gamma} = \frac{Β\Delta}{Β\Gamma}$ **β)** $\frac{Ζ\Delta}{ΑΒ} = \frac{\Delta\Gamma}{Β\Gamma}$ **γ)** $\frac{\Delta Ε}{Α\Gamma} + \frac{Ζ\Delta}{ΑΒ} = 1$

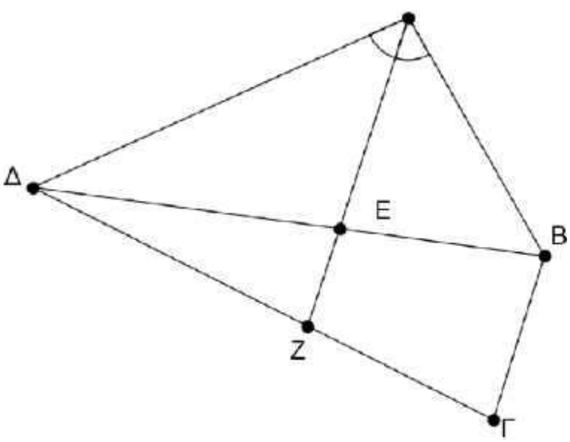
Υπόδειξη:

4. Στο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, η διχοτόμος της γωνίας Α είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ και τέμνει τη ΔΒ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ . Αν ΑΔ = 12, ΑΒ = 8, ΔΕ = 9 και ΖΓ = 6 , να αποδείξετε ότι:

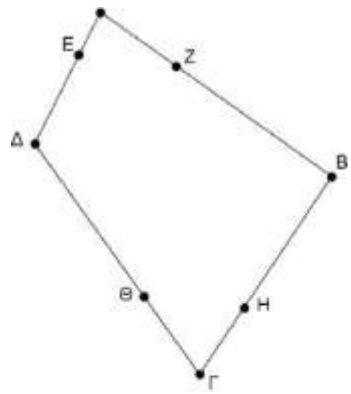
α) ΕΒ = 6

β) ΔΖ = 9

Υπόδειξη:



5. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε , Ζ , Η και Θ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΑΖ}{ΑΒ} = \frac{ΓΗ}{ΓΒ} = \frac{ΓΘ}{ΓΔ} = \frac{1}{3}$. Να αποδείξετε ότι:



α) ΕΖ / /ΘΗ / /ΔΒ

β) ΕΖ = ΘΗ = $\frac{1}{3}$ΔΒ

γ) ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο.

Υπόδειξη:

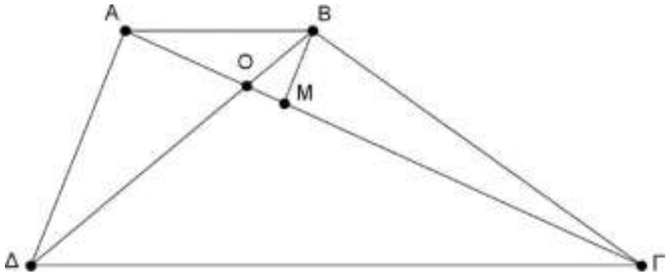
6. Οι διαγώνιοι του τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ/ /ΓΔ) με ΓΔ > ΑΒ τέμνονται στο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΔ τέμνει την ΑΓ στο Μ .

Αν ΟΑ = 12, ΟΒ = 9 και ΟΓ = 36 , να αποδείξετε ότι:

α) ΟΔ = 27

β) ΟΜ = 4

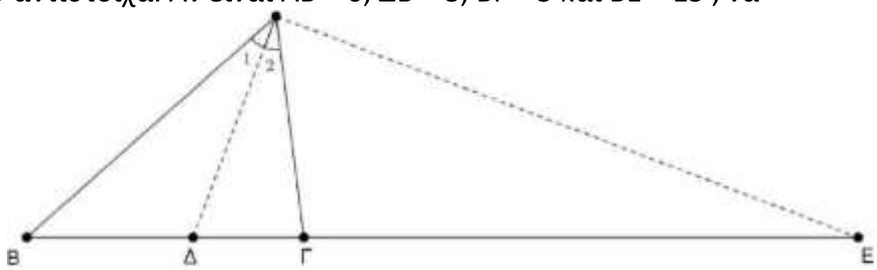
Υπόδειξη:



7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ > ΑΓ) και ΑΔ , ΑΕ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα. Αν είναι ΑΒ = 6, ΔΒ = 3, ΒΓ = 5 και ΒΕ = 15 , να αποδείξετε ότι:

α) ΑΓ = 4

β) ΔΕ = 12



Υπόδειξη:

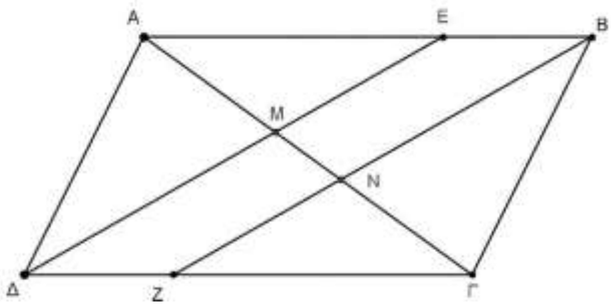
8. Στην πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΕ = $\frac{1}{3}$ΑΒ και στην πλευρά ΔΓ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΔΖ = $\frac{1}{3}$ ΔΓ.

Αν η διαγώνιος ΑΓ τέμνει τις ΔΕ και ΒΖ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ = ΓΝ = 2ΜΝ

β) ΜΝ = $\frac{1}{5}$ ΑΓ

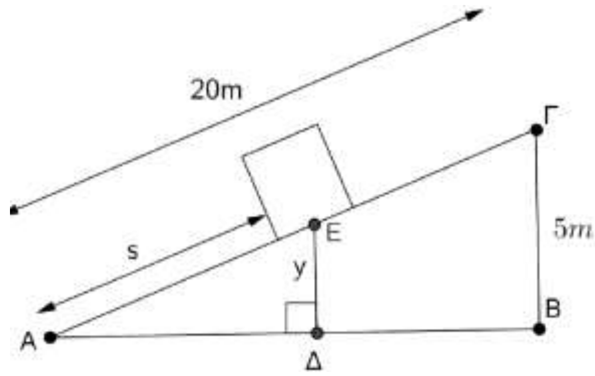
Υπόδειξη:



9. Στη διχοτόμο Οδ της γωνίας xOy θεωρούμε τα σημεία Α, Β τέτοια ώστε ΟΒ = 2 . ΟΑ. Η κάθετος στην Οδ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά Ox στο σημείο Ε και έστω Δ η προβολή του Β στην Oy.
Να αποδείξετε ότι :
α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΒΔ είναι όμοια
β) 2 . ΟΑ^2 = ΟΔ . ΟΕ
Υπόδειξη:

10. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ.
α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και σκαληνό, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια.
ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ δεν μπορεί να είναι όμοια.
β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με κορυφή το Γ , τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
Υπόδειξη:

11. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του παρακάτω σχήματος.
α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y, που απέχει το κουτί από το έδαφος κάθε χρονική στιγμή, ισχύει ότι y = $\frac{s}{4}$ όπου s το μήκος που έχει διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα.



β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2 m, να βρείτε:
i. Το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα.
ii. Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας Α.
Απάντηση:

12. Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι α=8, β=6 και γ=5.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.
β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς ΑΒ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ.
Υπόδειξη:

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 6, ΒΓ = 9 και η γωνία $\hat{B} = 60^{o}$.
α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = 3 $\sqrt{7}$
β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του
γ) Να υπολογίσετε την προβολή της ΑΒ πάνω στη ΒΓ
Υπόδειξη:

14. Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε ένα σημείο Μ.

α) Αν το σημείο Α είναι μέσο του τόξου ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

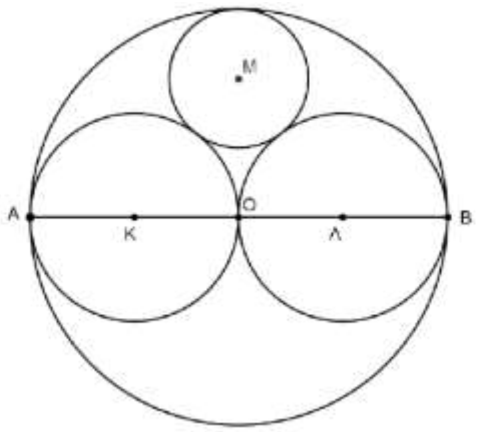
i) Όταν η χορδή ΑΒ είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, τότε $ΑΜ \cdot ΑΒ = ΑΓ^2$

ii) Όταν η χορδή ΑΒ δεν είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, ισχύει η σχέση $ΑΜ \cdot ΑΒ = ΑΓ^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν για τις χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο Μ ισχύει ότι $ΑΜ \cdot ΑΒ = ΑΓ^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι μέσο του τόξου ΓΔ.

Υπόδειξη:

15. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Με διαμέτρους τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ γράφουμε τους κύκλους κέντρων Κ και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου Μ και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων Κ και Λ και εσωτερικά του κύκλου με κέντρο Ο.



α) Να εκφράσετε τις διακέντρους ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των αντίστοιχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτινών τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι $ρ = \frac{R}{3}$

Υπόδειξη:

16. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) και ΒΕ το ύψος του. Αν είναι ΑΒ = 3, ΓΔ = 7 και ΒΓ = 4 τότε ,

α) Να αποδείξετε ότι $ΒΕ = 2\sqrt{3}$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Υπόδειξη:

17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΑΓ = 4 και ύψος $ΑΔ = \frac{12}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΓ.

β) Να αποδείξετε ότι $ΔΒ = \frac{9}{5}$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Υπόδειξη:

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) τέτοιο ώστε να ισχύει

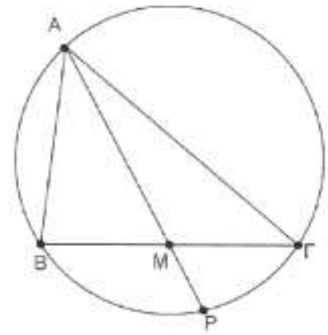
$2α^2 = β^2 + γ^2$. Αν η προέκταση της διαμέσου του ΑΜ τέμνει τον περιεγραμμένο κύκλο στο σημείο Ρ , να αποδείξετε ότι :

α) $μ_α = α\frac{\sqrt{3}}{2}$

β) $ΜΡ = α\frac{\sqrt{3}}{6}$

γ) (ΑΒΓ)=6(ΜΡΓ)

Υπόδειξη:



19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ , Λ και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ , ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια , ώστε $ΑΜ = \frac{1}{2}ΑΒ$, $ΑΛ = \frac{2}{3}$ ΑΓ και $ΒΖ = \frac{1}{3}ΒΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι $(ΑΜΛ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(ΜΖΛ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{5}{18}$

γ) Να υπολογίσετε το λόγω των εμβαδών $\frac{(ΑΜΖΛ)}{(ΑΒΓ)}$

Υπόδειξη:

20. Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο . Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται σε σημείο Μ , το οποίο είναι το μέσο της διαγώνιου ΒΔ .

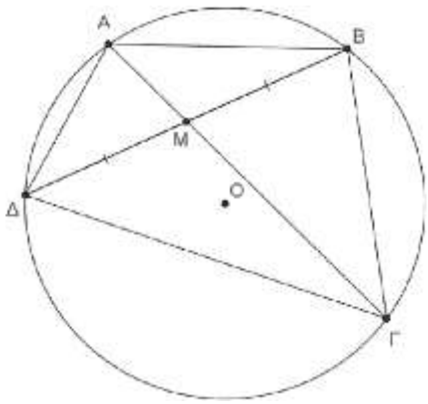
Να αποδείξετε ότι :

α) $ΔΒ^2 = 4ΜΑ.ΜΓ$

β) $ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 2ΑΜ.ΑΓ$

γ) $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΑΔ^2 = 2ΑΓ^2$

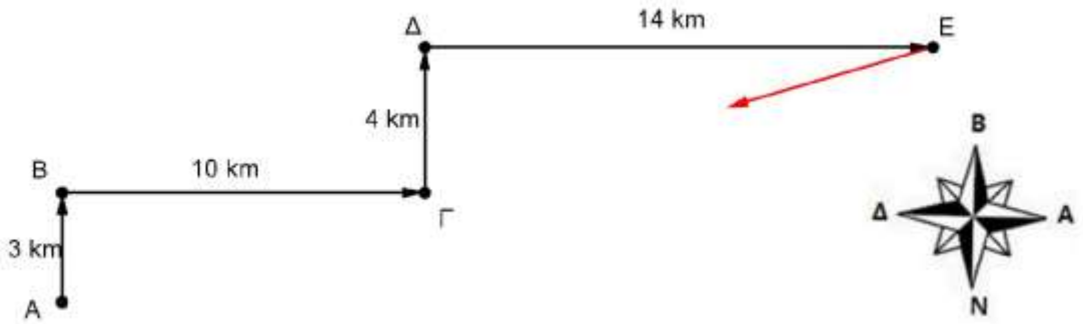
Υπόδειξη:



21. Ένα κινητό ξεκινάει (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε.

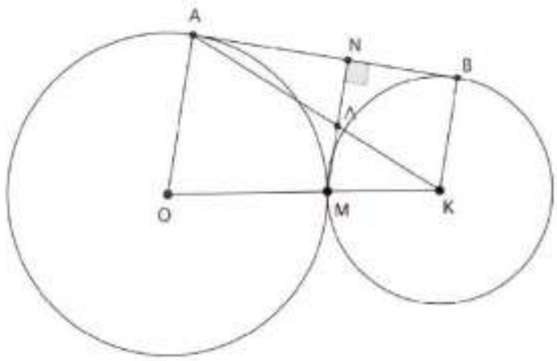
α) Αν από το σημείο Ε επιστρέψει στο σημείο Α από το οποίο ξεκίνησε, κινούμενο ευθύγραμμα, να βρείτε την απόσταση ΑΕ που θα διανύσει.

β) Τα σημεία Α,Γ και Ε είναι συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Υπόδειξη:

22. Δίνονται δυο κύκλοι (Ο,α) και (Κ, β) με α>β οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο Μ. Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ με Α , Β σημεία των κύκλων (Ο,α) και (Κ, β) αντίστοιχα. Από το Μ θεωρούμε την κάθετη στο ΑΒ , η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΒ στα σημεία Λ και Ν αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι :

α) ΜΛ = $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ **β)** ΛΝ = $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

γ) Αν E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (Ο, α) και (Κ, β) αντίστοιχα, τότε $\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{(A\Lambda N)}{(KM\Lambda)}\right)^2$.

Υπόδειξη:

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) χρήση θεωρήματος Θαλή β) ΑΔ=6, ΕΓ=5

2. χρήση θεωρήματος Θαλή και ιδιοτήτων αναλογιών

3. χρήση θεωρήματος Θαλή και ιδιοτήτων αναλογιών

4. α) θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου β) πόρισμα θεωρήματος Θαλή.

5. α) ιδιότητες αναλογιών – πόρισμα θεωρήματος Θαλή β) το τρίγωνο ΑΕΖ έχει πλευρές ανάλογες με τις πλευρές του ΑΔΒ κλπ. γ) προκύπτει από τα α, β.

6. α) το τρίγωνο ΟΑΒ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΟΓΔ β) το τρίγωνο ΟΒΜ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΟΔΑ.

7. α) θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου β) θεώρημα της εξωτερικής διχοτόμου.

8. α) ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, ΒΕΔΖ παραλληλόγραμμο, στο τρίγωνο ΑΝΒ γνωστό πόρισμα - ΒΕΔΖ παραλληλόγραμμο β) ΑΜ + ΜΝ + ΓΝ = ΑΓ, κλπ.

9. α) έχουν δύο γωνίες ίσες β) αφού τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ είναι όμοια τότε οι πλευρές τους θα είναι ανάλογες.

10. α) ii Τα δύο αυτά τρίγωνα είναι ορθογώνια. Για να είναι όμοια θα πρέπει οι γωνίες Α, Β να είναι ίσες δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές, άτοπο κλπ.

11. α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια β) i. s = 8 m ii. ΑΔ= $\sqrt{60}$ m.

12. α) $\alpha^2 > \beta^2+\gamma^2$ β) γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος

13. α) νόμος των συνημίτονων β) η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΒΓ κλπ. γ) θεώρημα της οξείας γωνίας για το τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ = 3.

14. α) i. ΟΑ είναι μεσοκάθετος της ΓΔ, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ το τμήμα ΓΜ θα είναι το ύψος προς την υποτείνουσα ΑΒ ii. τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΒΓ είναι όμοια, η σχέση ισχύει και όταν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ δεν είναι κάθετες β) τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΑΒΓ είναι όμοια, επειδή οι γωνίες Β και ΑΓΔ είναι εγγεγραμμένες τα αντίστοιχα τόξα ΑΓ και ΑΔ θα είναι ίσα δηλαδή το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

15. α) οι κύκλοι Λ και (Μ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά, οι κύκλοι (Ο,R) και (Μ,ρ) εφάπτονται εσωτερικά, κλπ. β) το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ισοσκελές, η ΟΜ είναι διάμεσος της ΚΛ, πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΚ.

16. α) στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ φέρω τα ύψη του ΑΚ και ΒΕ και συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΚ και ΒΕΓ, το ΑΒΕΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ Πυθαγόρειο θεώρημα β) φέρω ΓΗ ⊥ ΑΒ, ΒΗΓΕ είναι ορθογώνιο κλπ.

17. α) στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα β) στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ γ) είναι ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ κλπ.

18. α) πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ β) οι χορδές ΑΡ και ΒΓ του κύκλου τέμνονται στο Μ – θεώρημα τεμνόμενων χορδών γ) ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ, (ΑΜΒ) = 3 (ΜΡΓ) κλπ.

19. α) τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Α κοινή β) τα τρίγωνα ΜΒΖ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Β κοινή, τα τρίγωνα ΓΖΛ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Γ κοινή κλπ. γ) $\frac{(ΑΜΖΛ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{(ΑΜΛ)+(ΜΖΛ)}{(ΑΒΓ)} = \cdots$

20. α) θεώρημα των τεμνόμενων χορδών β) πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΔ γ) πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΒΓΔ

21. α) στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα β) έστω ότι τα σημεία Α , Γ , Ε είναι συνευθειακά. Τότε Α*Γ* + *Γ*Ε = ΑΕ, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΕ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα, κλπ. καταλήγουμε σε άτοπο γ) από την ομοιότητα των τριγώνων ΔΕΓ, ΒΓΑ έχουμε όλες τις γωνίες ίσες κλπ.

22. α) τα τρίγωνα ΑΚΟ και ΛΚΜ έχουν πλευρές ανάλογες β) $\frac{ΚΛ}{ΚΑ} = \frac{ΛΜ}{ΟΑ}$ κλπ., τα τρίγωνα ΑΝΛ και ΑΒΚ έχουν πλευρές ανάλογες γ) λόγος εμβαδών των τριγώνων ΑΛΝ και ΚΜΛ.

ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ