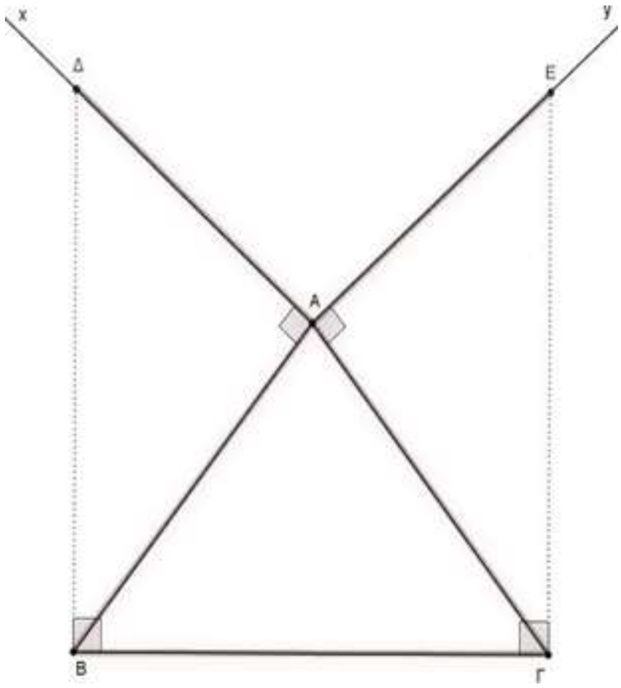
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Δίνεται το διπλανό ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε Αx⊥ ΑΒ και Αy⊥ΑΓ. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.

β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80^0, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ.

Υπόδειξη:



2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90^0$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$. Από το Δ φέρουμε ΔΕ⊥ ΒΓ, και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α).

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΒΕ

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα.

Υπόδειξη:

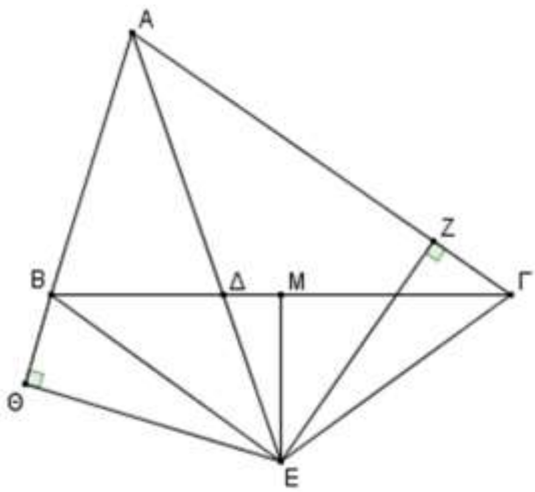
3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα.

γ) $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^o$

Υπόδειξη:



Πηγή: Τράπεζα θεμάτων του ΙΕΠ

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^0)$ με $\hat{B} = 50^0$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε ΔΕ=ΒΔ. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

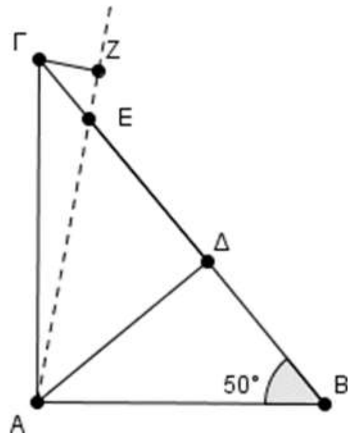
α) Να αποδείξετε ότι:

I. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

II. $\Gamma\hat{A}E = 10^0$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ.

Υπόδειξη:



5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}$εξ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή Α διέρχεται ημιευθεία Αχ//ΒΓ στο ημιεπίπεδο (ΑΒ, Γ). Στην ημιευθεία Αχ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΓ.

β) Η ΓΔ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$εξ.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Υπόδειξη:

6. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$=90) και το ύψος του ΑΗ. Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΗ=ΑΔ=ΑΕ.

ii. Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή.

Υπόδειξη:

7. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.

β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ.

Υπόδειξη:

8. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΑΒ.

Υπόδειξη:

9. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε ΜΒ = ΜΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα

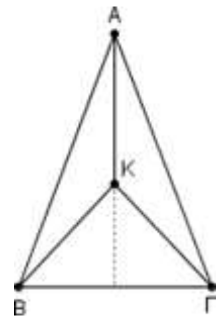
β) Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B M \Gamma}$.

Υπόδειξη:

Πηγή: Τράπεζα θεμάτων του ΙΕΠ

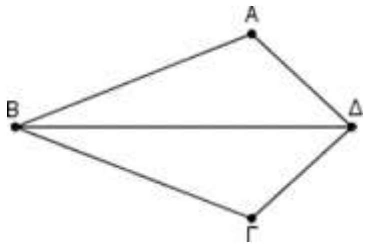
10. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$ και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οx και Οy αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΜΑ = ΜΒ
β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$.
Υπόδειξη:

11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε ΚΒ = ΚΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.
β) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B A \Gamma}$
γ) Η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B K \Gamma}$ του τριγώνου ΒΚΓ.
Υπόδειξη:

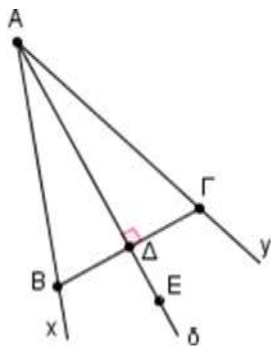


12. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.
β) Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ προς το μέρος της κορυφής Α διχοτομεί την πλευρά ΕΔ του τριγώνου ΔΑΕ.
Υπόδειξη:

13. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
Να αποδείξτε ότι:
α) $\widehat{B A \Gamma} = \widehat{B \Gamma A}$
β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.
Υπόδειξη:



14. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ.
Να αποδείξετε ότι :
α) Τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα.
β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ.
Υπόδειξη:

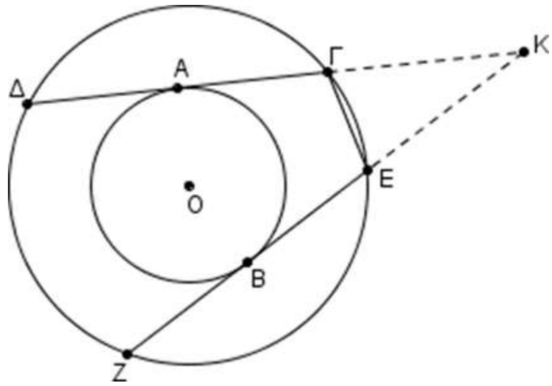


15. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα.
β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες.
Υπόδειξη:

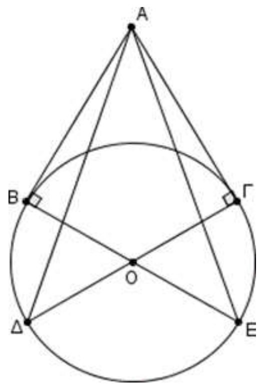
16. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ < R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου

(O,R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ZE.
β) Αν οι ΔΓ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KEΓ είναι ισοσκελές.

Υπόδειξη:

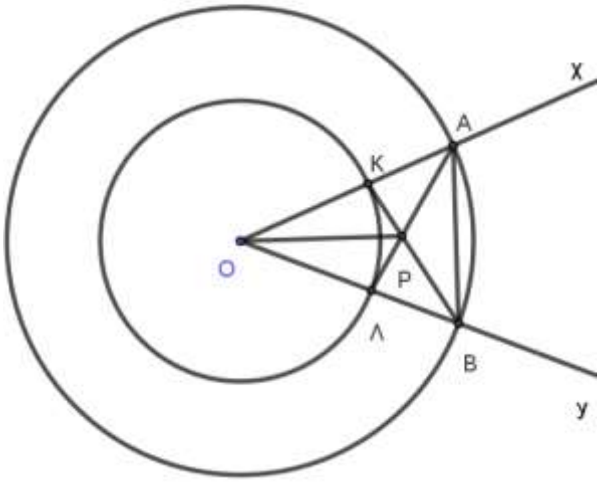


17. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.
Υπόδειξη:



18. Δίνεται οξεία γωνία $x\widehat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο, ρ_1) και (Ο, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία Κ, Α και την Oy στα Λ,Β αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΛ=ΒΚ
β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ
γ) Η ΟΡ διχοτομεί την γωνία xOy

Υπόδειξη:



19. Δύο κύκλοι (c1), (c2) τέμνονται στα Α και Β. Φέρνουμε την κοινή εφαπτομένη τους ΓΔ που είναι πλησιέστερα στο Α , όπου Γ , Δ είναι τα σημεία επαφής στους κύκλους (c1) και (c2) αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΓΑ και ΔΑ τέμνουν τους κύκλους (c2) και (c1) στο Ε και Ζ αντίστοιχα , τότε:
(Α1) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\widehat{B}\Delta = 180^{o} - \Gamma\widehat{A}\Delta$
(Α2) Να αποδείξετε ότι ΒΔ διχοτόμος της $\Gamma\widehat{B}E$
(Α3) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\widehat{B}E = \Delta\widehat{B}Z$
Υπόδειξη:

20. Σε κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε ένα τόξο ΑΒ και έστω Γ το μέσο του τόξου.
i. Να αποδείξετε ότι το Γ ισαπέχει από τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ.
ii. Αν Μ , Ν τα μέσα των χορδών ΑΓ και ΓΒ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι ΜΔ=ΝΕ
Υπόδειξη:

Πηγή: Τράπεζα θεμάτων του ΙΕΠ

21. Να δείξετε ότι ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές **αν και μόνο αν** η διχοτόμος μιας εξωτερικής του γωνίας είναι παράλληλη στην απέναντι πλευρά του τριγώνου.

Υπόδειξη:

22. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) ΕΗ = ΔΖ. (Μονάδες 12)

Λύση:

23. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε .

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ (Μονάδες 13)

β) ΑΔ<ΔΒ (Μονάδες 12)

Λύση:

24. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) ΑΔ=ΑΕ (Μονάδες 10)

Λύση:

25. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΚ=ΜΛ. (Μονάδες 13)

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ. (Μονάδες 12)

Λύση:

26. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι

α) ΜΔ=ΜΕ (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)

Λύση:

27. Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τα ίσα τόξα ΑΒ και ΑΓ, το καθένα ίσο με 120°. Έστω Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

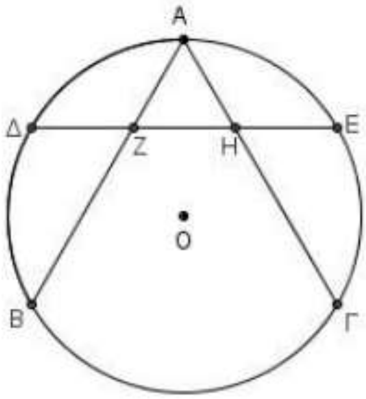
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ίσα και να υπολογίσετε τις γωνίες τους.

(Μονάδες 10)

γ) Η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ. (Μονάδες 7)



Λύση:

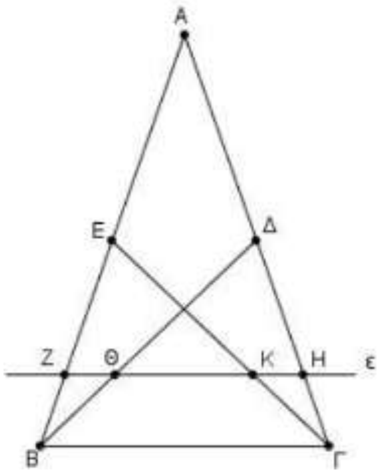
28. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ=ΓΗ. (Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα. (Μονάδες 9)

γ) ΖΚ=ΗΘ . (Μονάδες 8)



Λύση:

Πηγή: Τράπεζα θεμάτων του ΙΕΠ

29. Θεωρούμε δυο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην (ε) . Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η Α΄Β τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AOA'}$. (Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε) (Μονάδες 6)

β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$ (Μονάδες 6)

ii. $KA + KB > AO + OB$ (Μονάδες 7)

Λύση:

30. Έστω ότι ο κύκλος (Ο, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α, Δ και Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

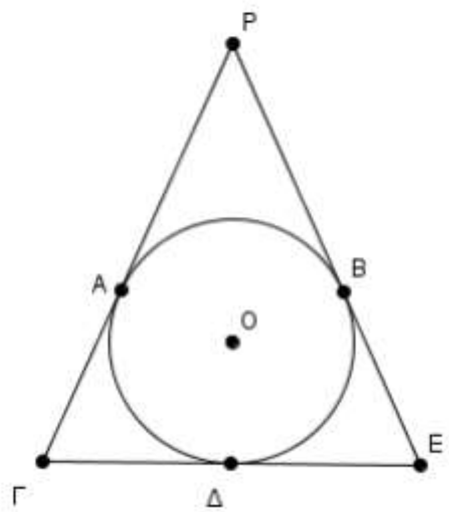
I. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$ (Μονάδες 6)

II. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$ (Μονάδες 8)

β) Αν ΑΓ=ΒΕ, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

II. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



Λύση:

31. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ . Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) ΓΑ= ΔΒ. (Μονάδες 8)

γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ + ΡΒ. (Μονάδες 7)

Λύση:

32. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A}$= 90°). Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ=ΑΒ. (Μονάδες 12)

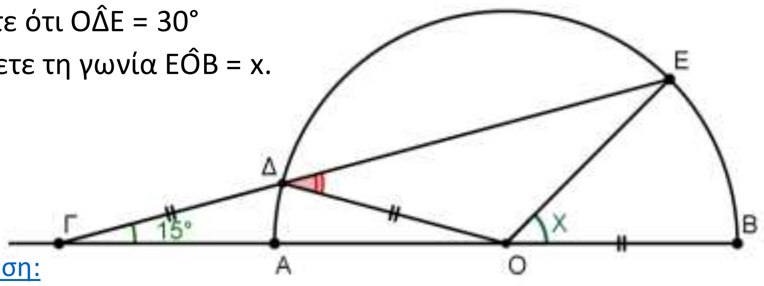
β) Αν επιπλέον $\widehat{B\Delta A}$ = 55°, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 13)

Λύση:

33. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το ΟΒ και η γωνία $B\hat{\Gamma}E$ είναι 15°, τότε

α) να αποδείξετε ότι $O\hat{\Delta}E$ = 30° (Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{O}B$ = x. (Μονάδες 12)



Λύση:

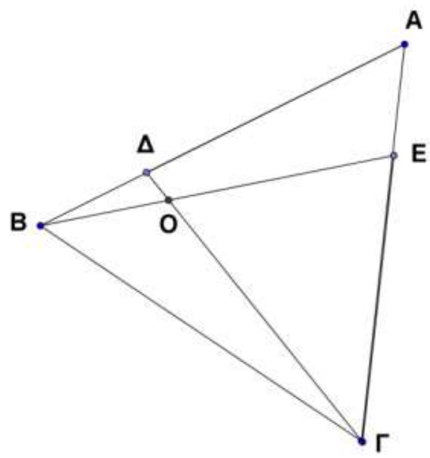
34. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε να είναι ΑΔ=ΓΕ. Έστω Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΒΕ.

α) Να αποδείξτε ότι:

i. $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$. (Μονάδες 10)

ii. $B\hat{O}\Gamma = 120^0$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΕΟΔ είναι εγγράψιμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



Λύση:

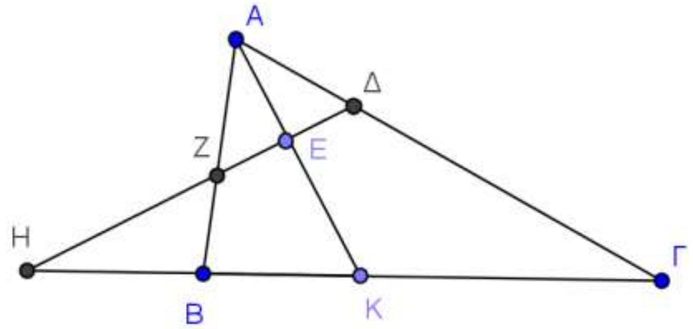
35. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) ΖΚ = ΚΔ. (Μονάδες 8)

γ) $Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 10)



Λύση:

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ (ΓΠΓ).
β) $\widehat{\Delta A E} = 100^0$ $\quad A\widehat{\Delta}E = A\widehat{E}\Delta = 40^0$

2. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΑΒΔ (ΓΠΓ).
β) (ΓΠΓ)

3. α) ΕΜ διάμεσος και ύψος β) Θεώρημα ΙΙ σελ. 50 γ) $A\hat{B}E$ εξωτερική γωνία στο τριγ. ΘΒΕ κλπ.

4. α) Ι. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΔ ΙΙ. Η $\widehat{AEB}$ εξωτερική γωνία στο τριγ. ΑΓΕ. β) $Z\widehat{E}\Gamma = 50^0$ $\quad Z\widehat{\Gamma}E = 40^0$

5. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΒΓΜ όπου Μ το μέσο της ΑΓ. β)Το ΑΒΓΔ είναι παρ/μο. Χρησιμοποιούμε εντός εναλλάξ γωνίες. γ) Από $\widehat{\Gamma}$εξ =2 $\widehat{A}$, $\widehat{\Gamma}$εξ = $\widehat{A}$ + $\widehat{B}$ καταλήγουμε ότι ΑΓ=ΒΓ.

6. i. Έστω Λ το σημείο που τέμνει η ΗΕ την ΑΓ και Λ' το σημείο που τέμνει η ΔΗ την ΑΒ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΛΗ & ΑΛΕ και μετά τα τρίγωνα ΑΗΛ' & ΑΛ'Δ.
ii. Θεώρημα ΙΙ σελ. 114 στο τρίγ. ΔΗΕ.

7. α) 1^{o} κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ) β) Έστω ΑΚ η απόσταση του Α από τη ΒΓ και ΔΛ η απόσταση του Δ από τη ΒΓ. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΚ & ΔΛΓ.

8. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ & ΓΕΑ β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΕΓ & ΒΔΓ

9. α) 3^{o} κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΠΠ) β) Παρατήρησε ότι $\widehat{BMA}$ =$\widehat{\Gamma MA}$.

10. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΜ & ΟΜΒ β) Προκύπτει από το α)

11. α) 3^{o} κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΠΠ) β) Προκύπτει από το α)
γ) Παρατήρησε ότι $\widehat{BKA}$ =$\widehat{\Gamma KA}$.

12. α)) 1^{o} κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ) β) Αν Μ' το σημείο που τέμνει η προέκταση της ΑΜ τη ΔΕ, συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΜ' & ΜΓΑ. Έπειτα τα τρίγωνα ΒΜΑ & ΑΜ'Δ.

13. α) Τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές β)) $\Gamma\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{\Gamma}A$ γ) Τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του ΑΓ.

14. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΕΓ.

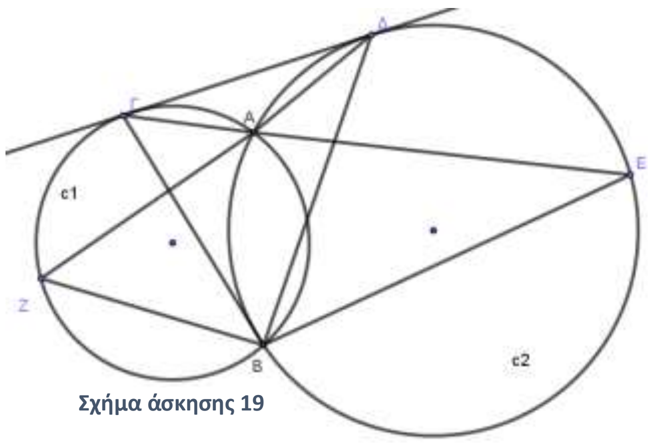
15. α) Π-Γ-Π β) τριγ. ΜΑΟ = τριγ. ΜΒΟ (Π-Π-Π)

16. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔΟΑ και ΖΟΒ. Στη συνέχεια τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΕ.
β) Παρατηρούμε ότι ΚΑ=ΚΒ

17. α) Ορθογώνια με δύο πλευρές ίσες β) Π-Π-Π

18. α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΑΛ (Π-Γ-Π) β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΚΑΡ και ΡΒΛ (Γ-Π-Γ) γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΡ και ΟΒΡ (Π-Π-Π)

19. (Α1) Παρατηρούμε ότι: $\widehat{\Gamma B A}$=$A\widehat{\Gamma}\Delta$ και $\widehat{AB\Delta}$=$A\widehat{\Delta}\Gamma$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο). Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι: $A\widehat{\Gamma}\Delta$+$A\widehat{\Delta}\Gamma$=180^{O} - $\Gamma\widehat{A}\Delta$ κλπ.



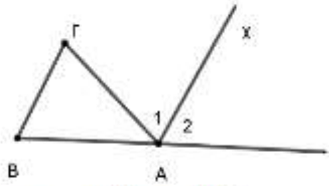
Σχήμα άσκησης 19

Πηγή: Τράπεζα θεμάτων του ΙΕΠ

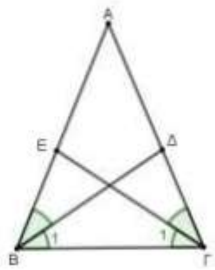
(Α2) Είναι: $\widehat{\Delta A E}=\widehat{\Delta B E}$ και $\widehat{\Delta A E}=\widehat{A\Gamma\Delta}+\widehat{A\Delta\Gamma}$ (εξωτερική γωνία στο τρίγωνο ΑΓΔ) κλπ.
(Α3) Είναι: $\widehat{ZB\Gamma}=\widehat{ZA\Gamma}$, $\widehat{ZA\Gamma}=\widehat{\Delta A E}=\widehat{\Delta B E}$ κλπ.

20. i.Τα τόξα ΑΓ και ΓΒ είναι ίσα. Άρα η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΟΒ. Κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. Άρα ΓΔ = ΓΕ.
ii. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΓΒ οι ΔΜ και ΕΝ είναι διάμεσοι προς τις αντίστοιχες υποτείνουσες ΑΓ και ΓΒ .
Άρα ΔΜ//=$\frac{A\Gamma}{2}$ και ΕΝ//=$\frac{\Gamma B}{2}$. Όμως ΑΓ=ΓΒ, οπότε ΔΜ=ΕΝ.

21. ⇨ Αν είναι ισοσκελές $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$. Επειδή Αχ διχοτόμος $\widehat{A1}=\widehat{A2}$.
Αλλά Αεξ = $\widehat{B}+\widehat{\Gamma} \to 2\widehat{A2}=2\widehat{B} \to \widehat{A2}=\widehat{B}$. Άρα Αχ // ΒΓ .
⇦ Αν Αχ // ΒΓ και Αχ διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας τότε $\widehat{A1}=\widehat{A2}$, $\widehat{A1}=\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{A2}=\widehat{B}$. Άρα $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ οπότε το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ισοσκελές.



22. **α)** Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι των γωνιών του Β, Γ αντίστοιχα.



Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ έχουν:

- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου
- $\widehat{B}_1=\frac{\widehat{B}}{2}=\frac{\widehat{\Gamma}}{2}=\widehat{\Gamma}_1$ ως μισά των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα.

β) Έστω ΕΗ και ΔΖ οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ.

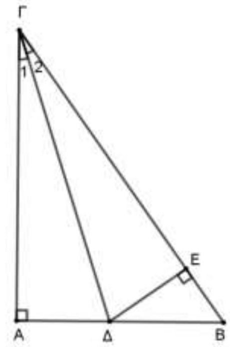
Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα, άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές τους ΒΕ και ΓΔ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{\Gamma}_1$ και $\widehat{B}_1$ αντίστοιχα. (1)

Τα τρίγωνα ΕΒΗ και ΔΖΓ έχουν:

- $\widehat{H}=\widehat{Z}=90°$ (ΕΗ⊥ΒΓ και ΔΖ⊥ΒΓ)
- $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ (γωνίες βάσης ισοσκελούς τριγώνου)
- ΒΕ = ΓΔ από (1)

Άρα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε είναι και ΕΗ = ΔΖ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

23. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α}$ ορθή, ΓΔ η διχοτόμος της $\widehat{Γ}$ και τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΒΓ.



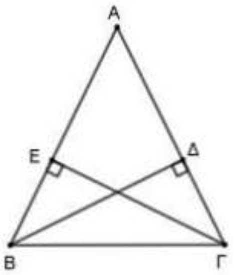
α) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΕ έχουν:

- $\widehat{Α} = \widehat{Ε} = 90°$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΓΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{Γ}_1 = \widehat{Γ}_2$, αφού ΓΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Γ}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές ΑΔ και ΔΕ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\widehat{Γ}_1$ και $\widehat{Γ}_2$ αντίστοιχα.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ η ΔΒ είναι η υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου. Άρα ΔΒ > ΔΕ. Επειδή ΑΔ = ΔΕ από το α) ερώτημα, προκύπτει ότι ΑΔ < ΔΒ.

24. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ, ΓΕ ύψη στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.



α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:

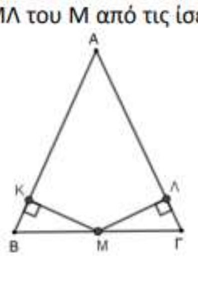
- $\widehat{Δ} = \widehat{Ε} = 90°$ (ΒΔ⊥ΑΓ και ΓΕ⊥ΑΒ ως ύψη του τριγώνου)
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$ γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΒΔΓ και ΓΕΒ θα ισχύει ότι οι πλευρές ΒΕ και ΓΔ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $Β\widehat{Γ}Ε$ και $Δ\widehat{Β}Γ$ αντίστοιχα.

Όμως είναι ΑΒ=ΑΓ, οπότε ΑΒ-ΒΕ =ΑΓ-ΓΔ, οπότε ΑΕ=ΑΔ ως διαφορές ίσων τμημάτων.

25. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ το μέσο της βάσης ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του Μ από τις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.



Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΜΛΓ έχουν:

- $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$ (ΜΚ⊥ΑΒ και ΜΛ⊥ΑΓ)
- ΜΒ = ΜΓ, αφού Μ μέσο του ΒΓ
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, γωνίες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές ΜΚ και ΜΛ είναι ίσες αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β)

Τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΑΛΜ έχουν:

- $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$ (όπως προηγουμένως)
- ΑΜ κοινή πλευρά
- ΜΚ = ΜΛ από το α) ερώτημα

Άρα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε, θα ισχύει ότι ΑΚ = ΑΛ και $A\hat{M}K = A\hat{M}\Lambda$ ως απέναντι γωνίες των ΑΚ, ΑΛ αντίστοιχα. Άρα, η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι διχοτόμος της $K\hat{M}\Lambda$.

26. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ και ΜΔ, ΜΕ κάθετα τμήματα στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

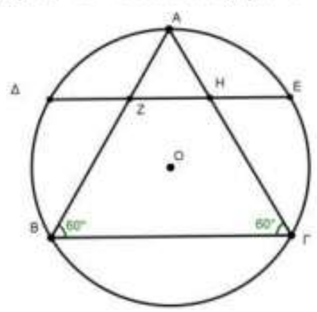
- $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90°$ (ΜΔ ⊥ ΑΒ και ΜΕ ⊥ ΑΓ)
- ΜΒ = ΜΓ, αφού Μ μέσο του ΒΓ
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, αφού ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίση. Οπότε έχουν και ΜΔ = ΜΕ, αφού οι πλευρές αυτές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα από το α) ερώτημα και τα υπόλοιπα στοιχεία τους θα είναι ίσα, επομένως ισχύει ΔΒ = ΕΓ.

Όμως ΑΒ = ΑΓ, οπότε ΑΔ=ΑΒ-ΔΒ και ΑΕ=ΑΓ-ΕΓ. Άρα τα τμήματα ΑΔ και ΑΕ είναι ίσα ως διαφορές ίσων τμημάτων. Κατά συνέπεια, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

27. **α)** Είναι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = 120°$, οπότε οι γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ, που είναι εγγεγραμμένες σε αυτά τα τόξα, θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 60°$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες 60°, θα είναι και η τρίτη 60°. Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.



β) Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ αντίστοιχα, ισχύει ότι: $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Delta B} = \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} = 60^\circ$. Τότε: $\Delta\hat{A}Z = A\hat{\Delta}Z = H\hat{A}E = H\hat{E}A = 30^\circ$ διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν σε τόξα των 60^o. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΔ, έχουμε:

$A\hat{Z}\Delta + Z\hat{\Delta}A + \Delta\hat{A}Z = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta + 30^o + 30^o = 180^o \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta = 120^o$

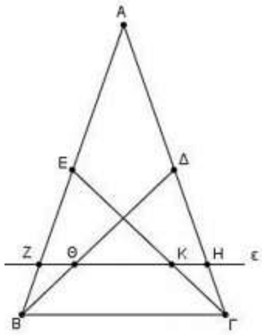
Τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ έχουν:

- ΑΔ = ΑΕ, διότι τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα
- $\Delta\hat{A}Z = E\hat{A}H = 30^o$
- $A\hat{\Delta}Z = A\hat{E}H = 30^o$

Σύμφωνα με το κριτήριο Γ – Π – Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισόπλευρο αφού $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z = 60^o$ (εφόσον είναι παραπληρωματικές των $A\hat{Z}\Delta = A\hat{H}E = 120^o$) και έχει ΑΖ = ΖΗ = ΑΗ. Επίσης ΑΖ = ΖΔ και ΑΗ = ΗΕ αφού τα τρίγωνα ΑΖΔ και ΑΗΕ είναι ισοσκελή. Τελικά ΔΖ = ΖΗ = ΗΕ, δηλαδή η χορδή ΔΕ τριχοτομείται από τις χορδές ΑΒ και ΑΓ.

28. **α)** Είναι $A\hat{Z}H = A\hat{B}\Gamma$ (1), ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ε, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Όμοια $A\hat{H}Z = A\hat{\Gamma}B$ (2). Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι $A\hat{\Gamma}B = A\hat{B}\Gamma$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $A\hat{Z}H = A\hat{H}Z$ οπότε και το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. Επομένως ΑΖ = ΑΗ. Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΑΖ = ΑΗ, αφαιρούμε κατά μέλη και βρίσκουμε ΑΒ – ΑΖ = ΑΓ – ΑΗ ⇔ ΒΖ = ΓΗ.



β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:

- ΑΒ = ΑΓ, διότι ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο
- ΑΔ = ΑΕ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
- $\hat{A}$ κοινή γωνία

Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα οπότε και οι πλευρές που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ = ΑΕ, θα είναι ίσες, άρα ισχύει $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$ (4).

Τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ έχουν:

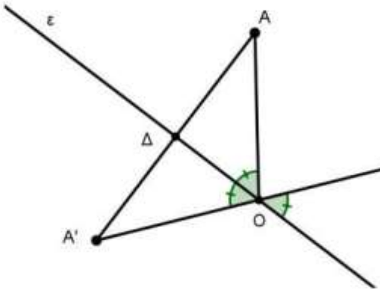
- ΒΖ = ΓΗ, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (α)
- $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$, λόγω της (4)
- $B\hat{Z}\Theta = K\hat{H}\Gamma$, ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{H}Z$ και $A\hat{Z}H$.

Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα.

γ) Από το (β), επειδή τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα, θα έχουν και όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, άρα και ΖΘ = ΗΚ.

Οπότε θα είναι και ΖΘ + ΘΚ = ΗΚ + ΘΚ, δηλαδή ΖΚ = ΗΘ.

29. **α) i.** Στο τρίγωνο ΟΑΑ΄ το ΟΔ είναι ύψος και διάμεσος, η ΟΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΑ΄, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η ΟΔ είναι και διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{O}A'$.

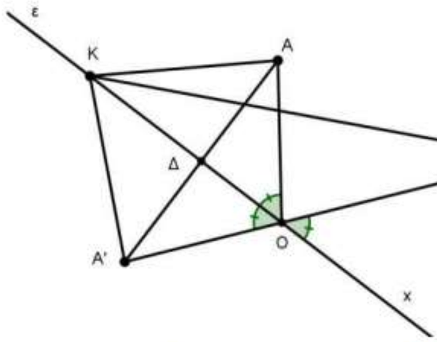


ii. Το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ορθογώνιο οπότε η γωνία $A\widehat{O}\Delta$ είναι οξεία.

Είναι $A\widehat{O}\Delta = \Delta\widehat{O}A'$ (από το α.i) και $\Delta\widehat{O}A' = B\widehat{O}x$ ως κατακορυφήν. Επίσης, $\Delta\widehat{O}A' < 90^o$ άρα και $B\widehat{O}x < 90^o$.

Άρα οι $A\widehat{O}\Delta$ και $B\widehat{O}Z$ είναι οξείες γωνίες και ίσες.

β) i. Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΑ΄ ισχύει ότι ΚΑ = ΚΑ΄.



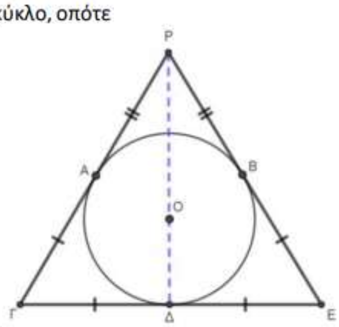
ii. Εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΚΒΑ΄ και βρίσκουμε:

ΚΑ΄ + ΚΒ > ΒΑ΄ και επειδή ΚΑ΄=ΚΑ και ΒΑ΄ = ΟΑ΄ + ΟΒ, προκύπτει ότι

ΚΑ + ΚΒ > ΟΑ΄ + ΟΒ ⇔ ΚΑ + ΚΒ > ΟΑ + ΟΒ

30. **α) i.** Τα ΓΑ, ΓΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Γ προς τον κύκλο, οπότε ΓΑ = ΓΔ. Τότε:

ΡΓ = ΡΑ + ΑΓ ή ΡΓ = ΡΑ + ΓΔ.



ii. Τα ΕΒ, ΕΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ε προς τον κύκλο, οποτε ΕΒ = ΕΔ.

Επίσης τα ΡΑ, ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ρ προς τον κύκλο και ισχύει ΡΑ = ΡΒ.

Όμως ΡΓ = ΓΔ + ΡΑ ή ΡΑ = ΡΓ – ΓΔ (1) και ΡΒ = ΡΕ – ΒΕ = ΡΕ – ΔΕ (2).

Οπότε, από (1), (2) βρίσκουμε ΡΓ – ΓΔ = ΡΕ – ΔΕ

β) i. Αν ΑΓ = ΒΕ, τότε ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΒΕ.

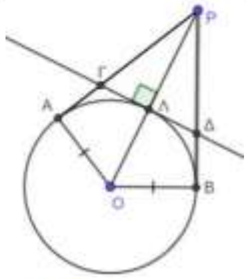
Είναι ΡΓ = ΓΔ + ΡΑ, ΡΕ = ΡΒ + ΔΕ, οπότε ΡΓ = ΡΕ. Άρα το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

ii. ΟΔ ⊥ ΓΔ διότι ΟΔ ακτίνα κύκλου. Επίσης ΡΔ ⊥ ΓΔ, διότι ΡΔ διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΡΓΕ οπότε και ύψος. Άρα ΟΔ και ΡΔ ταυτίζονται επομένως Ρ, Ο και Δ συνευθειακά.

31. **α)** Επειδή τα ΡΑ και ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα η ΡΟ είναι διχοτόμος της $A\hat{P}B$.

Επίσης ΓΔ⊥ΟΛ, οπότε είναι ΡΟ⊥ΓΔ.

Άρα στο τρίγωνο ΡΓΔ το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος οπότε είναι ισοσκελές με ΡΓ = ΡΔ.



β) Επειδή τα ΡΑ και ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα ισχύει ότι:

ΡΑ = ΡΒ ⇔ ΡΓ + ΓΑ = ΡΔ + ΔΒ

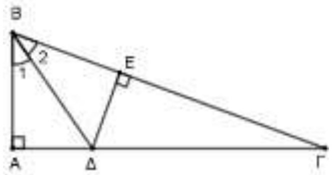
Οπότε λόγω του ερωτήματος (α) προκύπτει ΓΑ = ΔΒ

γ) Είναι ΓΛ = ΓΑ (1) και ΔΛ = ΔΒ (2) ως εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από τα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Τότε η περίμετρος Π του τριγώνου ΡΓΔ είναι:

Π = ΡΓ + ΓΔ + ΡΔ = ΡΓ + ΓΛ + ΛΔ + ΡΔ

Οπότε λόγω των σχέσεων (1), (2) βρίσκουμε Π = ΡΓ + ΓΑ + ΔΒ + ΡΔ = ΡΑ + ΡΒ

32. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}$ ορθή, ΒΔ η διχοτόμος της $\hat{B}$ και τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΒΓ.



Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΕ έχουν:

- $\hat{A} = \hat{E} = 90°$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΒΔ κοινή πλευρά,
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, επειδή ΒΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε οι πλευρές ΒΕ και ΑΒ είναι ίσες γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}_2$ και $\hat{B}_1$ αντίστοιχα.

β) Έστω ότι είναι $B\hat{\Delta}A = 55^{o}$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ισχύει ότι $55^{o} + \hat{B}_1 = 90^{o}$.

Άρα $\hat{B}_1 = 35^{o} = \hat{B}_2$ αφού ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$, οπότε $\hat{B} = 70^{o}$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^{o}$.

Άρα $\hat{\Gamma} = 20^{o}$.

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΓΔΕ ($\hat{E} = 90^{o}$) ισχύει ότι $\Gamma\hat{\Delta}E + \hat{\Gamma} = 90^{0}$.

Άρα $\Gamma\hat{\Delta}E = 70^{o}$.

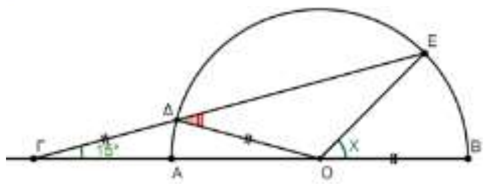
33. **α)** Έστω ρ η ακτίνα του ημικυκλίου.

Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΔ = ΓΔ = ρ

Άρα $\Delta\hat{O}A = \hat{\Gamma} = 15^{o}$.

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΔ,

άρα $O\hat{\Delta}E = \Delta\hat{O}A + \hat{\Gamma} = 2\cdot15^{o} = 30^{o}$



Το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές διότι ΟΔ = ΟΕ = ρ. Άρα $\hat{E} = O\hat{\Delta}E = 30^\circ$

Η γωνία $B\hat{O}E$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΟΕ, άρα

$B\hat{O}E = \hat{E} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $x = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$

34. α) i. Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΔΓ έχουν:

ΑΔ = ΓΕ από υπόθεση,

ΑΓ = ΒΓ ως πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ και

$\Gamma\hat{A}\Delta = B\hat{\Gamma}E = 60^\circ$ ως γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}A$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΓ και ΑΓ.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΔΓ είναι ίσα, ισχύει ότι: $E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΓ και ΑΔ. Οπότε ισχύει και ότι: $O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}A$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΟΓ έχουμε:

$B\hat{O}\Gamma + O\hat{B}\Gamma + B\hat{\Gamma}O = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + O\hat{\Gamma}A + B\hat{\Gamma}O = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + B\hat{\Gamma}A = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{O}\Gamma = 120^\circ$.

β) Είναι $\Delta\hat{O}E = B\hat{O}\Gamma = 120^\circ$ ως κατακορυφήν και $A = 60^\circ$ ως γωνία του ισόπλευρου τριγώνου, άρα $\Delta\hat{O}E + \hat{A} = 180^\circ$, δηλαδή στο τετράπλευρο ΑΔΟΕ δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο.

35. **α)** Στο τρίγωνο ΑΖΔ η ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $A\hat{Z}E = A\hat{\Delta}E$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ βρίσκουμε:

$$\hat{A} + A\hat{Z}E + A\hat{\Delta}E = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 2A\hat{\Delta}E = 180^\circ \Leftrightarrow A\hat{\Delta}E = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

Τότε:

$$Z\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}E = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - A\hat{\Delta}E \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow Z\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

β) Η ΑΕ είναι μεσοκάθετος του ΖΔ και το σημείο Κ ανήκει σε αυτήν. Άρα το Κ ισαπέχει από τα Ζ και Δ, οπότε ΖΚ = ΚΔ.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΗΔΓ βρίσκουμε:

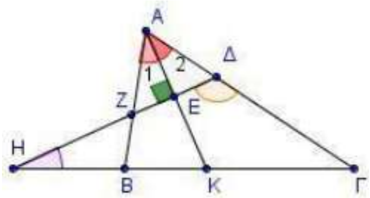
$$Z\hat{H}\Gamma + Z\hat{\Delta}\Gamma + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma + 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma}$$

Όμως στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ$$

Οπότε έχουμε:

$$Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$



ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ