

Κλασική λογική - ασαφής λογική. Παραδείγματα.

Ο Αριστοτέλης πρώτος ανέπτυξε συστηματικά - με αρχές και κανόνες - την επιστήμη της λογικής (γνωστής ως **κλασικής**), η οποία έγινε ευρέως αποδεκτή στα μαθηματικά και στην επιστήμη μέχρι τις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Τότε άρχισε σταδιακά η “μετεξέλιξή της” – ονομάστηκε συμβολική ή τυπική ή μαθηματική λογική, η οποία δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια μαθηματικοποίηση των κανόνων (δηλαδή γραμμένων με συμβολικό τρόπο αντί για φυσική γλώσσα) της λογικής, όπως αυτοί πρωτοδιατυπώθηκαν από τον Αριστοτέλη. **Η λογική ασχολείται με τη μελέτη διαδικασιών και κανόνων, με τους οποίους μπορούμε να οδηγηθούμε με ορθό τρόπο από υποθέσεις σε συμπεράσματα.** Η διαδικασία με την οποία ο νους καταστρώνει ένα επιχείρημα λέγεται **συλλογισμός**. *Παράδειγμα ορθού συλλογισμού:*



Αριστοτέλης (384 - 322 π.Χ.). Θεωρείται ο πατέρας της λογικής.

❖ Κανένα τρίγωνο δεν είναι τετράπλευρο.

Κάθε ρόμβος είναι τετράπλευρο.

Άρα, κανένας ρόμβος δεν είναι τρίγωνο.

Παρά τις κριτικές και αμφισβητήσεις που δέχτηκε η κλασική λογική, εξακολουθεί να χρησιμοποιείται και σήμερα σε όλους τους τομείς των θετικών επιστημών και της φιλοσοφίας. Βέβαια έχει αδυναμίες, αφού για παράδειγμα είναι αδύνατο να μοντελοποιήσουμε τις προτάσεις μιας φυσικής γλώσσας με αυτή. Αυτό ώθησε τους επιστήμονες στην εισαγωγή νέων λογικών, όπως της **ασαφούς** λογικής που είναι η προσπάθεια τους να μελετήσουν και να κατανοήσουν τη δομή της φυσικής γλώσσας του ανθρώπου και να την μαθηματικοποιήσουν σε συμβολικό επίπεδο.

Ό,τι έχει σχέση με την κλασική λογική είναι συνυφασμένο με το 0 ή το 1. Πράγματι, **μια πρόταση στην κλασική λογική μπορεί να έχει μόνο δύο τιμές, 0 (αν η πρόταση είναι ψευδής) ή 1 (αν η πρόταση είναι αληθής)**. Μια τέτοια λογική λέγεται δίτιμη. Αληθή χαρακτηρίζεται κάθε πρόταση, η οποία περιγράφει μια πραγματική κατάσταση, ενώ ψευδή κάθε πρόταση, η οποία περιγράφει μια μη υπαρκτή κατάσταση.

Παραδείγματα:

- | | |
|--|-----------------|
| • Ο αριθμός 1022 είναι φυσικός αριθμός. | Αληθής (τιμή 1) |
| • Το 100 είναι μικρότερο του 10. | Ψευδής (τιμή 0) |
| • Ο αριθμός -1 είναι λύση της εξίσωσης $x^2 + 1=0$. | Ψευδής (τιμή 0) |
| • Ο αριθμός $\sqrt{64}$ ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών. | Αληθής (τιμή 1) |
| • Ο Βόλος είναι πρωτεύουσα του Νομού Μαγνησίας. | Αληθής (τιμή 1) |
| • Η Πάρνηθα είναι μία μεγάλη λίμνη. | Ψευδής (τιμή 0) |

Όμως στην καθημερινή επικοινωνία των ανθρώπων χρησιμοποιούνται αρκετές φορές ασαφείς εκφράσεις, όπως:

- Η θερμοκρασία είναι κοντά στους 20^o C.
- Πίνω ένα γλυκό καφέ νωρίς κάθε πρωί.
- Κατοικώ δίπλα στον Βόλο.
- Ο μισθός του Νίκου πλησιάζει τα 1000 €.

Στις παραπάνω εκφράσεις **υπάρχει ασάφεια, δηλαδή απροσδιοριστία ή ανακρίβεια**, γιατί μπορεί να έχουμε και άλλες τιμές μεταξύ 0 και 1, μεταξύ του συμβαίνει ή δεν συμβαίνει. Για παράδειγμα, ο γλυκός καφές μπορεί για κάποιον να περιέχει δύο

κουταλιές ζάχαρη, για κάποιον άλλο τρεις κουταλιές κ.ο.κ. Νωρίς κάθε πρωί για κάποιον μπορεί να σημαίνει στις 7 π.μ., για κάποιον άλλο στις 7.30 π.μ., κ.ο.κ. Είναι δυνατό λοιπόν να βρούμε πολλές διαφορετικές εκδοχές – πρακτικά άπειρες.

Επομένως υπήρξε η ανάγκη για ανάπτυξη μιας λογικής με περισσότερες από δύο τιμές σε μια πρόταση. Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε μία επέκταση της κλασικής λογικής. Μία τέτοια λογική λέγεται πλειότιμη. «**Τ' είναι θεός; τί μη θεός; και τί τ' ανάμεσά τους;**» αναρωτιόνταν στο ποίημά του Ελένη ο Γιώργος Σεφέρης το 1955. **Διαρκής λοιπόν η αναζήτηση του ενδιάμεσου των ακραίων καταστάσεων, των αποχρώσεων του γκρι ανάμεσα στο μαύρο και το άσπρο.**

Το 1965, ο **Zadeh - μαθηματικός και μηχανικός** – έθεσε τα θεμέλια της θεωρίας των ασαφών συνόλων, ανοίγοντας παράλληλα το δρόμο και για τις πρακτικές εφαρμογές της ασαφούς λογικής. Το ασαφές σύνολο είναι ένας μηχανισμός με τον οποίο αποδίδουμε τον βαθμό (από το 1 έως το 0) στον οποίο κάποιο αντικείμενο έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα. Έτσι μια πρόταση που δεν είναι αληθής δεν σημαίνει αναγκαία ότι είναι ψευδής, αλλά μπορεί να είναι μερικά αληθής και μερικά ψευδής – όπως π.χ. ένα μισογεμάτο ποτήρι. Έχουμε λοιπόν βαθμό συμμετοχής 1 αν το ποτήρι είναι γεμάτο με νερό. Επίσης, για παράδειγμα, αποδίδουμε βαθμό συμμετοχής 0.8 αν το νερό βρίσκεται αρκετά πάνω από τη μέση του ποτηριού, βαθμό συμμετοχής 0.6 αν βρίσκεται λίγο πιο πάνω από τη μέση, βαθμό συμμετοχής 0.9 αν βρίσκεται πολύ κοντά στην κορυφή του ποτηριού κ.ο.κ. Τέλος έχουμε βαθμό συμμετοχής 0 αν το ποτήρι δεν έχει καθόλου νερό. Η έννοια της **σταδιακής ή βαθμιαίας μετάβασης** από την κατάσταση της **συμμετοχής** ενός στοιχείου σε ένα σύνολο, στην κατάσταση της **μη συμμετοχής** είναι το **κύριο χαρακτηριστικό** των ασαφών συνόλων.



"Όλα είναι θέμα βαθμού"
τονίζει ο Zadeh

1^ο παράδειγμα ασαφούς συνόλου. Έστω ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε το ασαφές σύνολο $A = \{\text{φυσικοί αριθμοί κοντά στο } 9\}$.

Καταρχήν σκεφτόμαστε - **με βάση την γνώση και την εμπειρία που έχουμε** - ποιои φυσικοί αριθμοί περιβάλλουν τον αριθμό 9. Έτσι καταλήγουμε στο σύνολο $X = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ στο οποίο περιλαμβάνονται οι αριθμοί πέριξ του 9.

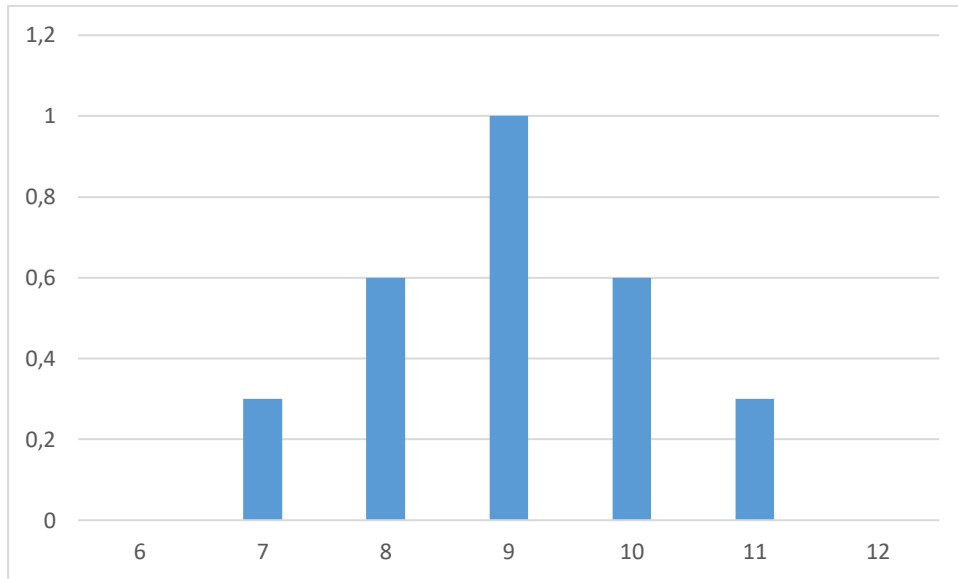
Έπειτα αντιστοιχούμε βαθμό συμμετοχής από 1 έως 0 σε κάθε στοιχείο του X:

- **1** στο φυσικό αριθμό **9**
- **0.6** στους φυσικούς αριθμούς **8** και **10**
- **0.3** στους φυσικούς αριθμούς **7** και **11**
- **0** στους φυσικούς αριθμούς **6** και **12**

Επομένως, έχουμε το ασαφές σύνολο:
$$A = \frac{1.0}{9} + \frac{0.6}{8} + \frac{0.6}{10} + \frac{0.3}{7} + \frac{0.3}{11} + \frac{0.0}{6} + \frac{0.0}{12}.$$

Με αυτό τον τρόπο έχει καθιερωθεί να γράφονται τα ασαφή σύνολα. Το + και το κλάσμα δεν έχουν κανένα μαθηματικό νόημα. Σε κάθε στοιχείο (στο συγκεκριμένο παράδειγμα σε κάθε αριθμό) του συνόλου αντιστοιχούμε ένα βαθμό συμμετοχής.

Το παρακάτω γράφημα δείχνει τη συμμετοχή κάθε στοιχείου του X στο ασαφές σύνολο A.



Παρατηρήσεις:

i. Από το X απουσιάζουν οι αριθμοί π.χ. 3 και 14, γιατί δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι κατέχουν την ιδιότητα «αριθμοί κοντά στο 9» και συνεπώς ο βαθμός συμμετοχής τους είναι 0.

ii. Αν η φύση του προβλήματος επιβάλλει να έχουμε το σύνολο $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ τότε οι βαθμοί συμμετοχής θα είναι διαφορετικοί, εκτός από το βαθμό 1 στον αριθμό 9 που είναι ίδιος.

2^ο παράδειγμα ασαφούς συνόλου. Έστω το σύνολο $Y = \{\SigmaΙ, ΕΛ, ΙΡ, ΚΑ, ΙΣ, ΝΖ\}$

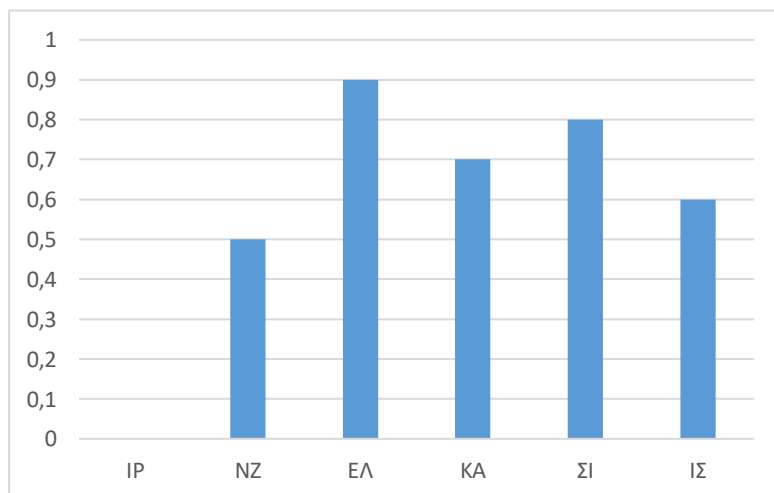
το οποίο παριστάνει τις χώρες Σιγκαπούρη, Ελβετία, Ιράκ, Καναδάς, Ισπανία και Νέα Ζηλανδία αντίστοιχα. Θέλουμε να δημιουργήσουμε το ασαφές σύνολο $B = \{\text{καλύτερες χώρες στον κόσμο για να ζει κανείς και να εργάζεται}\}$.

Με βάση τα αποτελέσματα των δημοσκοπήσεων, οι προτιμήσεις του κοινού δια-

μορφώνουν το ακόλουθο ασαφές σύνολο: $B = \frac{0.9}{ΕΛ} + \frac{0.8}{ΣΙ} + \frac{0.7}{ΚΑ} + \frac{0.6}{ΙΣ} + \frac{0.5}{ΝΖ} + \frac{0.0}{ΙΡ}$

Παρατήρηση: Το σύνολο Y αποτελείται από μη διατεταγμένα στοιχεία, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια σχέση διάταξης μεταξύ των στοιχείων και συνεπώς παρατίθενται σε τυχαία σειρά.

Το διπλανό γράφημα απεικονίζει τη συμμετοχή κάθε χώρας στο ασαφές σύνολο B.



Η ασαφής λογική¹ (fuzzy logic) αποτελεί σήμερα μια αναγνωρισμένη επιστημονική θεωρία, κυρίως πρακτικού χαρακτήρα, με προσανατολισμό στην επίλυση ή τουλάχιστον στην επίτευξη καλύτερων λύσεων από αυτές των υπόλοιπων επιστημών, ικανή για την αντιμετώπιση προβλημάτων με υψηλό βαθμό αβεβαιότητας. Έχει άμεσες βιομηχανικές εφαρμογές που συνεισέφεραν στην ανθρώπινη εξέλιξη και πρόοδο. Είναι χαρακτηριστικό ότι σε αναπτυγμένες τεχνολογικά χώρες όπως η Ιαπωνία, **οι μαθητές από τις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου διδάσκονται τις αρχές της ασαφούς θεωρίας συνόλων.**

Που χρησιμοποιείται η ασαφής λογική;

- ✓ **Βιομηχανίες τσιμέντου.** Χρησιμοποιείται αυτόματος ασαφής ελεγκτής στην ανάμιξη των υλικών και την κατεργασία τους.
- ✓ **Μετρό.** Το ασαφές σύστημα ελέγχου περιλαμβάνει δύο βασικά τμήματα: τον ελεγκτή σταθερής ταχύτητας, ο οποίος ξεκινά το τρένο και το κρατά σε σταθερή ταχύτητα κάτω από ένα όριο ασφαλείας, και τον ελεγκτή αυτόματης πέδησης, ο οποίος ελέγχει την ταχύτητα του τρένου έτσι ώστε να σταματήσει σε ένα προκαθορισμένο σημείο. Με αυτό τον τρόπο έχουμε έως και 70% λιγότερα σφάλματα στην επιτάχυνση και την πέδηση σε σχέση με τους ανθρώπινους χειριστές.
- ✓ **Πλυντήρια ρούχων.** Αισθητήρες ανιχνεύουν το χρώμα και το είδος της βρωμιάς των ρούχων, όπως επίσης και τον όγκο της πλύσης. Στη συνέχεια ένα ασαφές σύστημα χρησιμοποιεί ασαφείς κανόνες για την αυτόματη επιλογή του κατάλληλου κύκλου πλύσης.
- ✓ **Συσκευές κλιματισμού.** Με χρήση ασαφών κανόνων η θερμοκρασία αλλάζει αυτόματα σύμφωνα με τις περιβαλλοντολογικές συνθήκες και τις προτιμήσεις του χρήστη.
- ✓ **Μηχανές λήψης εικόνας και βίντεο.** Ασαφής ελεγκτής ελέγχει την καλύτερη εστίαση και σταθεροποίηση της εικόνας.
- ✓ **Σύστημα φρένων ABS, αυτόματα κιβώτια ταχυτήτων, ελεγκτές ταξιδιού** σε αυτοκίνητα. Χρησιμοποιούνται ασαφή συστήματα πέδησης και μετάδοσης κίνησης.
- ✓ Κατανομή καυσίμου ανάλογα με την πορεία πτήσης σε δεξαμενές **πολεμικών αεροσκαφών.**
- ✓ **Ανελκυστήρες.** Ασαφής ελεγκτής συμβάλει στην βέλτιστη ενεργειακή απόδοση.
- ✓ **Δορυφορικά** συστήματα επικοινωνιών, **τοπογραφικά** χαρτογράφησης.
- ✓ **Βιολογικός καθαρισμός νερού, τριφασικοί κινητήρες, Ρομποτικοί βραχίονες.**
- ✓ **Οικονομική επιστήμη, οικολογία, στατιστική, ψυχολογία, κοινωνιολογία.**
- ✓ **Ιατρικές εφαρμογές, γενετική επιστήμη.**
- ✓ **Πυρηνική φυσική, διαστημική τεχνολογία.**

Επίσης χρησιμοποιείται και σε πολλές άλλες εφαρμογές, ιδιαίτερα πάνω στον έλεγχο συστημάτων. Να τονισθεί ότι η ασαφής λογική και ειδικότερα τα **ασαφή συστήματα** (τα οποία αποτελούν υλοποίηση των ασαφών συνόλων) είναι ένας από τους τρεις πυλώνες της **υπολογιστικής νοημοσύνης**, η οποία με τη σειρά της υπάγεται στο ευρύ πεδίο της τεχνητής νοημοσύνης.

¹ Σχετικό αρχείο: <https://christosziogas.mysch.gr/wp-content/uploads/2020/01/ΑΣΑΦΕΙΣ-ΕΚΤΙΜΗΤΕΣ-ΚΑΙ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.pdf>