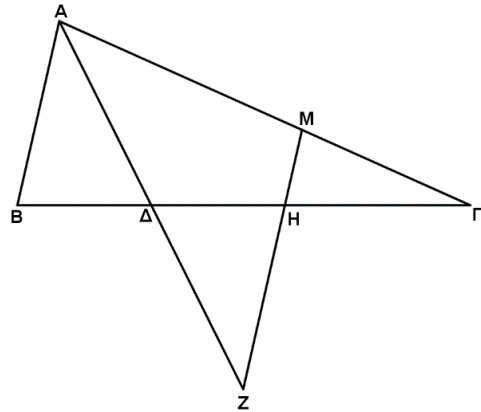


## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  και  $AD$  διχοτόμος της  $\widehat{BAG}$ . Προεκτείνουμε την  $AD$  κατά τμήμα  $DZ = AD$ . Αν το  $Z$  είναι το μέσο της  $BH$  και η ευθεία  $ZH$  τέμνει την  $AG$  στο σημείο  $M$  να δείξετε ότι:

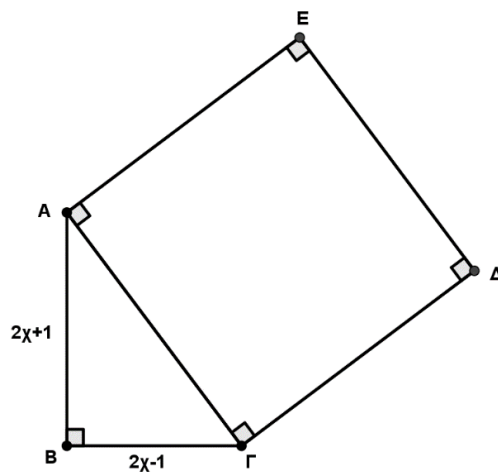


α)  $\triangle AB\Delta = \triangle Z\Delta H$

- β) Το τρίγωνο  $\triangle AMZ$  είναι ισοσκελές.

Υπόδειξη:

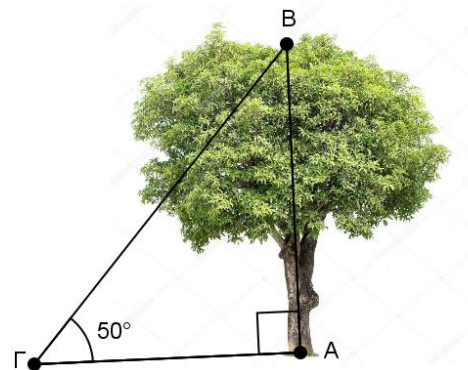
2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο  $A\Gamma\Delta E$  και ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{B} = 90^\circ$ ) με  $AB = (2\chi + 1)$  cm και  $B\Gamma = (2\chi - 1)$  cm.



Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι  $74 \text{ cm}^2$ , να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών  $AB$  και  $B\Gamma$  του τριγώνου.

Απάντηση:

3. Ο κύριος Φίλιππος στέκεται στο σημείο  $\Gamma$  και θέλει να υπολογίσει το ύψος ενός δέντρου. Τοποθέτησε ένα γωνιόμετρο σε απόσταση  $A\Gamma = 8m$  από τον κορμό του δέντρου και υπολόγισε ότι το μέτρο της γωνιάς προς την κορυφή του δέντρου είναι  $50^\circ$ . Με τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών να υπολογίσετε:



- α) το ύψος του δέντρου και  
β) την απόσταση  $B\Gamma$ .

(Οι απαντήσεις σας να δοθούν με ένα δεκαδικό ψηφίο.)

Υπόδειξη:

4. Δίνεται τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  στο οποίο η γωνία  $B$  είναι ίση με τη γωνία  $\Gamma$  ( $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ). Στην πλευρά  $B\Gamma$  παίρνουμε σημεία  $\Delta$  και  $E$ , έτσι ώστε  $B\Delta = E\Gamma$ .

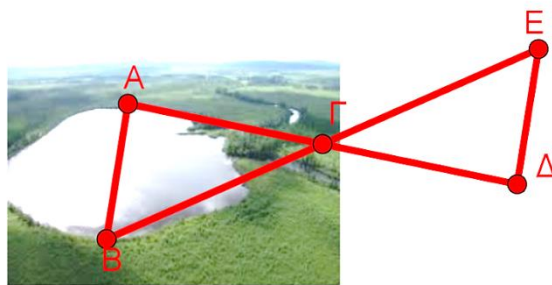
α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις  $\Delta Z$  και  $E H$ , των σημείων  $\Delta$  και  $E$  από τις πλευρές  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα, είναι ίσες.

β) Δύο δρομείς αναχωρούν από το σημείο  $A$ . Ο πρώτος ακολουθεί τη διαδρομή  $AZ\Delta A$  και ο άλλος τη διαδρομή  $AHEA$ . Αν κινούνται και οι δύο με την ίδια ταχύτητα, να δείξετε ότι ο χρόνος που θα χρειαστούν για να καλύψουν τη διαδρομή είναι ο ίδιος.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη:

5. Προκειμένου ένας τοπογράφος μηχανικός να μετρήσει το πλάτος μιας λίμνης, τοποθέτησε δύο δείκτες  $A$  και  $B$  στις όχθες της λίμνης και ένα τρίτο δείκτη  $\Gamma$  στη ξηρά, ώστε να μπορεί να μετρήσει τις αποστάσεις  $\Gamma A$  και  $\Gamma B$ . Κατόπιν, στην προέκταση των ημιευθειών  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  πήρε τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Gamma\Delta = \Gamma A$  και  $\Gamma E = \Gamma B$ . Ο τοπογράφος μέτρησε την απόσταση των  $\Delta$  και  $E$  και ισχυρίστηκε ότι είναι ίση με το πλάτος  $AB$  της λίμνης. Να δικαιολογήσετε γιατί ο ισχυρισμός του τοπογράφου είναι σωστός.

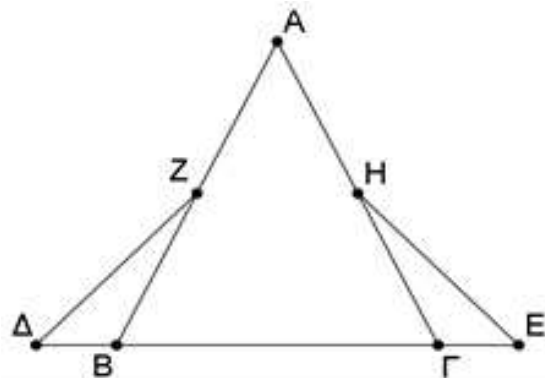


Υπόδειξη:

6. Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) φέρουμε το ύψος  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε το ύψος  $A\Delta$  προς το  $\Delta$  και παίρνουμε πάνω στην προέκταση σημείο  $H$ . Αν  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $HE = HZ$ .

Υπόδειξη:

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) με  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  ίσες προεκτάσεις της  $B\Gamma$  και  $Z, H$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Delta BZ$  και  $E\Gamma H$  είναι ίσα.



Υπόδειξη:

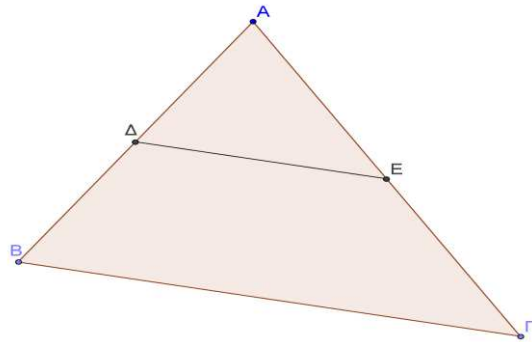
8. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο  $\varphi(x) = x(2x - 3)^2 - 4(x - 1)^3 - (4 + 3x)(3x - 4) + 3x(3x + 1)$  είναι σταθερό.

Απάντηση:

9. Να δείξετε ότι:  $\left(1 - \frac{6x}{x^2 - 9} + \frac{3}{x - 3}\right) \cdot (x + 3) = x$

Απάντηση:

10. Στο διπλανό τρίγωνο είναι  $DE \parallel BG$  και  $D$  μέσο της  $AB$ . Αν  $AD = 3 \text{ cm}$ ,  $AB = x^2 - 4x - 6$ ,  $AE = \psi + 1$  και  $EG = 3\psi - 7$ , να βρείτε τις τιμές των  $x$  και  $\psi$ .



Απάντηση:

11. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με  $\Sigma$  αν είναι σωστές και με  $\Lambda$  αν είναι λανθασμένες.
- Αν  $\alpha > \beta$  τότε  $3\alpha > 3\beta$
  - Αν  $\alpha > \beta$  τότε  $-2\alpha > -2\beta$
  - Αν  $\alpha\beta > 0$  τότε οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  είναι θετικοί
  - Αν  $\alpha\beta > 1$  τότε  $\alpha > \frac{1}{\beta}$
  - Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  τότε  $\alpha - \gamma > \beta - \delta$
  - Αν  $\alpha > -3$  και  $x > \gamma$  τότε  $\alpha x > -3\gamma$
  - Αν  $\alpha < \beta$  τότε  $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$
  - Αν  $\alpha > \beta$  τότε  $\alpha^2 > \beta^2$
  - Η ανίσωση  $0x < 5$  είναι αδύνατη
  - Η ανίσωση  $0x > -3$  αληθεύει για κάθε  $x$

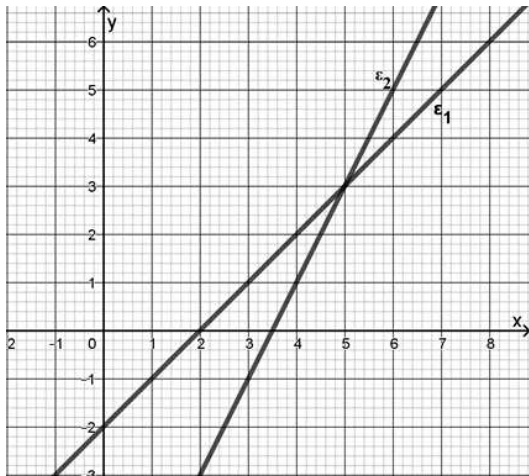
Απάντηση:

12. Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση
- Αν  $\kappa\lambda < 0$  τότε Α.  $\kappa < 0$  Β.  $\lambda < 0$  Γ.  $\kappa < 0$  και  $\lambda < 0$  Δ.  $\kappa, \lambda$  ετερόσημοι
  - Αν  $x < 1$  από τις παρακάτω σχέσεις να βρείτε ποια δεν ισχύει  
Α.  $x < 2$  Β.  $2x < 2$  Γ.  $x - 4 < -3$  Δ.  $x < 0$
  - Αν  $\alpha(\beta - 2) > 0$  και  $\alpha < 0$  τότε  
Α.  $\beta > 0$  Β.  $\beta = 2$  Γ.  $\beta < 0$  Δ.  $\beta > 2$  Ε.  $\beta < 2$

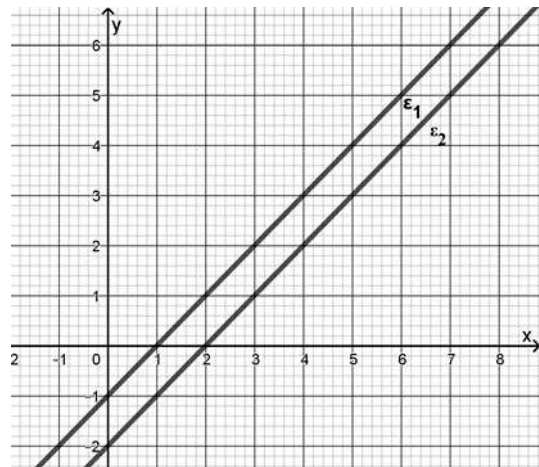
Απάντηση:

13. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

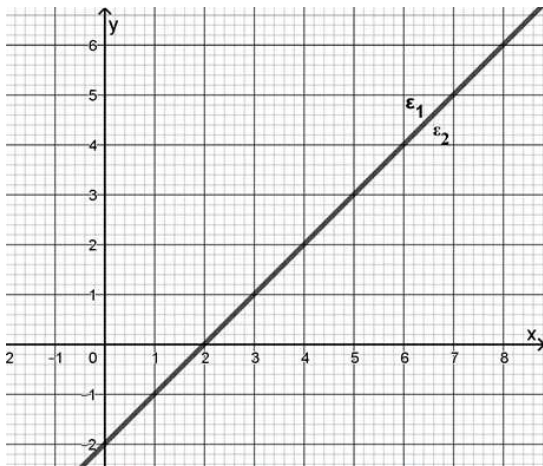
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 1



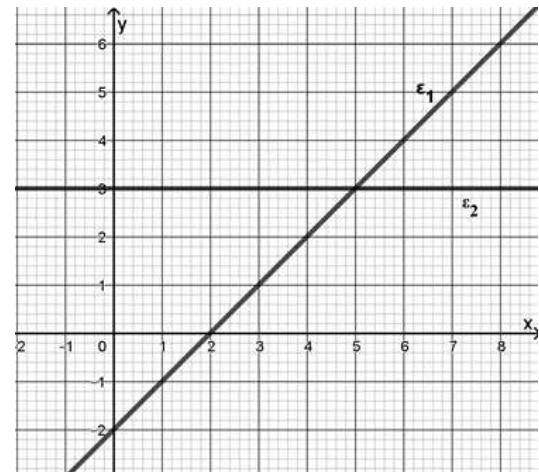
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 2



ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 3



ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 4



Σύστημα εξισώσεων	Γραφική Παράσταση	Λύση
$y = 2x - 7$ $x - y = 2$		
$y = 3$ $x - y = 2$		
$x - y = 2$ $3x - 3y = 6$		
$x - y = 2$ $x - y = 1$		

Απάντηση:

14. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση:

$$A = (3x + 1)^2 - 6(1 + x)(x - 1) - (x + 1)^3 + x^3 - 2(y + 3)$$

(α) Να κάνετε τις πράξεις και να δείξετε ότι  $A = 3x - 2y$

(β) Αν  $A = -4$  και  $xy = 2$ , να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

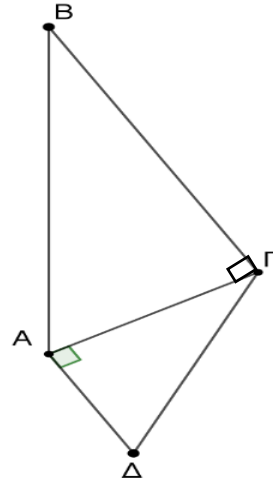
I.  $B = 12x^3y^2 - 8x^2y^3$

II.  $\Gamma = 9x^2 + 4y^2$

Απάντηση:

15. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα  $\text{ΑΓΒ}$  και  $\text{ΓΑΔ}$  με  $\hat{\text{ΑΓΒ}} = 90^\circ$ ,  $\hat{\text{ΓΑΔ}} = 90^\circ$ ,  $\text{ΑΒ} = 20 \text{ cm}$ ,  $\text{ΑΔ} = 7 \text{ cm}$  και  $\hat{\text{ΑΒΓ}} = 30^\circ$ .

Να βρείτε την πλευρά  $\text{ΑΓ}$  και να αποδείξετε ότι  $\eta\mu(\hat{\text{ΑΓΔ}}) = 0,7 \cdot \sigma\upsilon\upsilon\eta(\hat{\text{ΑΓΔ}})$



Απάντηση:

16. Δίνονται τα πολυώνυμα  $A(x) = 2x^2 + 4x^3$ ,  $B(x) = 2x^2 + x - 15$  και  $\Gamma(x) = 2x - 5$ .

Να βρείτε: α)  $A(x) - B(x) =$  β)  $A(x) \cdot \Gamma(x) - 2x \cdot B(x) =$

γ)  $A(x + 1) =$  δ)  $B(-2) + \Gamma(3) =$

Απάντηση:

17. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3\chi}{\chi^2 - 5\chi} + \frac{5}{10 - 2\chi} = \frac{\chi}{\chi^2 - 10\chi + 25}$$

Απάντηση:

18. Αν  $2\chi + \varphi = -5$ , να δείξετε ότι η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = (2\chi - \varphi)^2 + 7\varphi\chi - \chi(2 - \varphi) + 2\chi \text{ είναι } 25.$$

Απάντηση:

19. Δίνεται το πολυώνυμο:  $P(\chi) = (\chi + 2)^3 - (\chi + 3)(3 - \chi) - (\chi^3 + 5\chi^2) - 11\chi$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $P(\chi) = 2\chi^2 + \chi - 1$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $P(\chi) = 0$

Απάντηση:

20. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

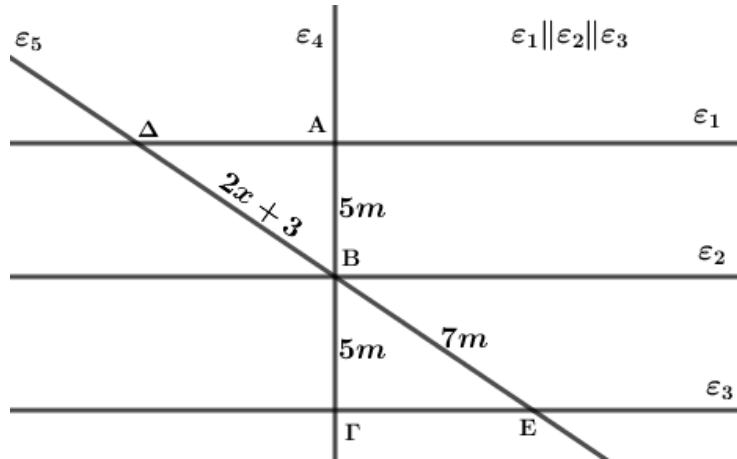
- i.  $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta) \cdot (\beta + \alpha) = 2\beta \cdot (\alpha + \beta)$
- ii.  $(\alpha + 1)^3 - \alpha(\alpha - 2)(\alpha + 2) - 2\alpha^2 = (\alpha + 1)^2 + 5\alpha$

Υπόδειξη:

21. Να λύσετε την εξίσωση :  $\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{4}{x^2 + x} = \frac{1}{(x - 1)^2}$

Απάντηση:

22. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την τιμή του  $\chi$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Απάντηση:

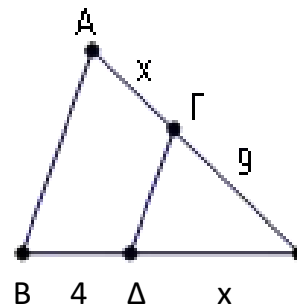
23. Να κάνετε τις πράξεις: 
$$\frac{\left(\frac{\chi^2}{\chi - 2} - \frac{2\chi}{\chi + 2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{\chi^2 + 4}{4\chi}}$$

Απάντηση:

24. Από τυχαίο σημείο K της διαμέσου AM τριγώνου ABΓ φέρνουμε παράλληλες στις AB και AΓ, που τέμνουν την BΓ στα Δ και E. Να αποδείξετε ότι MΔ = ME.

Υπόδειξη:

25. Στο διπλανό σχήμα είναι AB// ΓΔ. Να υπολογίσετε το  $\chi$ .



Απάντηση:

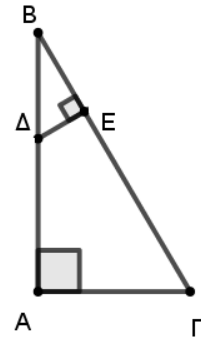
26. Να κάνετε τις πράξεις:

- i.  $(-4 \cdot \chi^3)^2 \cdot (16^{-1} \cdot \chi \cdot \gamma^7) =$

- ii.  $(5^{-1} \cdot \sqrt{2} \cdot \chi^3) \cdot (\sqrt{50} \cdot \chi^3) =$
- iii.  $\frac{(-3)^2 \cdot \chi}{-3^2 \cdot \chi^3} =$
- iv.  $(-8 \cdot \chi^2 \gamma^8)^2 : (2^2 \cdot \chi^3 \cdot \gamma^2)^3$

Απάντηση:

- 27.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$ . Από τυχαίο σημείο  $\Delta$  της  $AB$  φέρουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:
- i. τρίγωνο  $AB\Gamma \approx$  τρίγωνο  $B\Delta E$
  - ii.  $A\Gamma \cdot \Delta B = \Delta E \cdot B\Gamma$



Υπόδειξη:

- 28.** Να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ των παραστάσεων:
- i)  $4(2-\chi)^2, 6\chi-12, \chi^2-5\chi+6$
  - ii)  $2\alpha-4, 2-\alpha, \alpha^2-4$

Απάντηση:

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ****ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. α) Δύο πλευρές και μία γωνία ίσες μία προς μία β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:  
 $Z\hat{A}M = M\hat{Z}A$ .
2.  $AB=7$  cm,  $BΓ=5$  cm
3. α) Παίρνουμε την  $\epsilon\phi 50^\circ$  β) Χρησιμοποιούμε το  $\eta\mu 50^\circ$ .  
Στο internet ή σε κομπιουτεράκι βρίσκουμε:  $\eta\mu 50^\circ = 0,7660$   $\epsilon\phi 50^\circ = 1,1918$
4. α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα  $BZ\Delta$  και  $E\eta\Gamma$  είναι ίσα.  
β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $A\epsilon\eta$  είναι ίσα.
5. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Gamma\epsilon\Delta$ .
6. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $E\eta A$  και  $AZ\eta$ .
7. Δύο πλευρές και μία γωνία ίσες μία προς μία
8.  $\phi(\chi) = 20$
9. 
$$\left[ \frac{\chi^2-9}{\chi^2-9} - \frac{6\chi}{\chi^2-9} + \frac{3(\chi+3)}{\chi^2-9} \right] \cdot (\chi+3) = \dots = \left( \frac{\chi^2-3\chi}{\chi^2-9} \right) \cdot (\chi+3) = \chi$$
10.  $x=6$ ,  $\psi=9$
11. α) Σωστό αφού  $3 > 0$  και  $3 \cdot 3 > 3 \cdot 0$   
β) Λάθος αφού  $-2 < 0$   
γ) Λάθος αφού μπορεί να είναι και αρνητικοί  
δ) Λάθος γιατί δεν ξέρουμε το πρόσημο του β  
ε) Λάθος γιατί δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη  
στ) Λάθος γιατί δεν ξέρουμε αν τα μέλη είναι θετικά  
ζ) Σωστό από θεωρία  
η) Λάθος γιατί δεν ξέρουμε αν τα μέλη είναι θετικά  
θ) Λάθος γιατί η ανίσωση αληθεύει για κάθε  $x$  αφού  $0 < 5$   
ι) Σωστό αφού το  $0 > -3$
12. α) Δ β) Δ γ) Ε
- 13.

Σύστημα εξισώσεων	Γραφική Παράσταση	Λύση
$y = 2x - 7$ $x - y = 2$	1	$(\chi, \gamma) = (5,3)$
$y = 3$ $x - y = 2$	4	$(x, \gamma) = (5,3)$
$x - y = 2$ $3x - 3y = 6$	3	Αόριστο $(\chi, \gamma) = (2+\gamma, \gamma) \gamma \in \mathbb{R}$
$x - y = 2$ $x - y = 1$	2	Αδύνατο



14. α) πράξεις: ταυτότητες, επιμεριστική ιδιότητα, αναγωγή όμοιων όρων, κλπ.  
Ειδικότερα την ταυτότητα  $(x+1)^3=(x+1)(x+1)^2=(x+1)(x^2+2x+1)=\dots$   
β) Β = -64, Γ = 40.
15. ΑΓ = 10 cm. Είναι  $\epsilon\phi(\widehat{A\Gamma\Delta}) = 0,7$  κλπ.
16. α)  $4x^3 - x + 15$ , β)  $8x^4 - 20x^3 - 12x^2 + 30x$ , γ)  $4x^3 + 14x^2 + 16x + 6$ , δ) -8
17. Αδύνατη
18. Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε  $A=(2\chi+\phi)^2$  και με αντικατάσταση είναι  $A=25$
19. α) πράξεις: ταυτότητες, επιμεριστική ιδιότητα, αναγωγή όμοιων όρων, κλπ.  
β)  $x = -1$ ,  $x = 1/2$
20. i), ii) Ξεκινώντας από το 1<sup>ο</sup> μέλος και με πράξεις: ταυτότητες, επιμεριστική ιδιότητα, αναγωγή όμοιων όρων, κλπ. καταλήγουμε στο 2<sup>ο</sup> μέλος.
21.  $x = 2$ ,  $x = 1/2$
22.  $x = 2$
23.  $x = -1$
24. Στο τρίγωνο ΜΑΒ, ΚΔ // ΑΒ και στο τρίγωνο ΜΑΓ, ΚΕ // ΑΓ. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Θαλή σε κάθε τρίγωνο, κλπ.
25.  $\chi = 6$
26. i)  $\chi^7 \cdot \gamma^7$  ii)  $2\chi^6$  iii)  $-\chi^{-2}$  iv)  $\chi^{-5} \cdot \gamma^{10}$
27. i) κριτήριο ομοιότητας τριγώνων ii) Παίρνουμε αναλογία πλευρών και πολλαπλασιάζουμε χιαστί.
28. i) ΕΚΠ= $12(\chi-2)^2(\chi-3)$  ΜΚΔ= $2(\chi-2)$  ii) ΕΚΠ= $-2(\alpha+2)(\alpha-2)$  ΜΚΔ= $\alpha-2$

[ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ](#)